# प्रारम्भिक कलन

डॉ. लक्ष्मीप्रसाद वाजपेयी



मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी

# प्रारम्भिक कलन
## (Elementary Calculus)

Lakshmi Prasad Vajpayee

लेखक
**डा. लक्ष्मीप्रसाद वाजपेयी**
एम. एस-सी., पी-एच. डी.

**मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी**
**भोपाल**

प्रकाशक :
मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी
भोपाल





प्रथम संस्करण
1971



मूल्य:
तीन रुपये पचास पैसे



मुद्रक:
मॉडर्न प्रिन्टरी लिमिटेड
55, कड़ावघाट मेनरोड
इन्दौर-2

# प्राक्कथन

इस बात पर सभी शिक्षा-शास्त्री एकमत हैं कि मातृभाषा के माध्यम से दी गयी शिक्षा छात्रों के सर्वाङ्गीण विकास एवं मौलिक चिन्तन की अभिवृद्धि में अधिक सहायक होती है, इसी कारण स्वातन्त्र्य आन्दोलन के समय एवं उसके पूर्व से ही स्वामी श्रद्धानन्द, रवीन्द्रनाथ टैगोर एवं महात्मा गाँधी जैसे देशमान्य नेताओं ने मातृभाषा के माध्यम से शिक्षा देने की दृष्टि से आदर्श शिक्षा-संस्थाएँ स्थापित कीं। स्वतन्त्रता प्राप्ति के बाद भी देश में शिक्षा सम्बन्धी जो कमीशन या समितियाँ नियुक्त की गयीं, उन्होंने एकमत से इस सिद्धान्त का अनुमोदन किया।

इस दिशा में सबसे बड़ी बाधा थी—श्रेष्ठ पाठ्य-ग्रन्थों का अभाव। हम सब जानते हैं कि न केवल विज्ञान और तकनीक, अपितु मानविकी के क्षेत्र में भी विश्व में इतनी तीव्रता से नये अनुसंधानों और चिन्तनों का आगमन हो रहा है कि यदि उसे ठीक ढंग से गृहीत न किया गया तो मातृभाषा से शिक्षा पाने वाले अंचलों के पिछड़ जाने की आशंका है। भारत सरकार के शिक्षा मंत्रालय ने इस बात का अनुभव किया और भारत की क्षेत्रीय भाषाओं में विश्वविद्यालयीन स्तर पर उत्कृष्ट पाठ्य-ग्रन्थ तैयार करने के लिए समुचित आर्थिक दायित्व स्वीकार किया। केन्द्रीय शिक्षा मंत्रालय की यह योजना उसके शत-प्रतिशत अनुदान से राज्य अकादमियों द्वारा कार्यान्वित की जा रही है। मध्यप्रदेश में हिन्दी ग्रन्थ अकादमी की स्थापना इसी उद्देश्य से की गयी है।

अकादमी विश्वविद्यालयीन स्तर की मौलिक पुस्तकों के निर्माण के साथ, विश्व की विभिन्न भाषाओं में बिखरे हुए ज्ञान को हिन्दी के माध्यम से प्राध्यापकों एवं विद्यार्थियों को उपलब्ध करेगी। इस योजना के साथ राज्य के सभी महाविद्यालय तथा विश्वविद्यालय सम्बद्ध हैं। मेरा विश्वास है कि सभी शिक्षाशास्त्री

एवं शिक्षा-प्रेमी इस योजना को प्रोत्साहित करेंगे। प्राध्यापकों से मेरा अनुरोध है कि वे अकादमी के ग्रन्थों को छात्रों तक पहुँचाने में हमें सहयोग प्रदान करें जिससे बिना और विलम्ब के विश्वविद्यालयों में सभी विषयों के शिक्षण का माध्यम हिन्दी बन सके।

**जगदीशनारायण अवस्थी**

शिक्षा मंत्री

अध्यक्ष: मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी

# प्रस्तावना

विज्ञान के विकास के साथ ही साथ जिस विषय का सर्वाधिक महत्व बढ़ा है, वह है--गणित । आज न केवल वैज्ञानिक विषय ही अधिकांश गणित पर निर्भर हैं अपितु मानविकी के महत्वपूर्ण विषयों यथा अर्थशास्त्र और मनोविज्ञान जैसे विषयों पर भी जिनकी महत्ता निर्विवाद रूप से स्वीकार की जाती है । कुछ विषय तो अधिकांश गणित के सहारे ही समझे जा सकते हैं । यदि इसे छोड़ दें तो भी ठीक दिशा में ठीक चिन्तन की दृष्टि के सामान्य विद्यार्थियों के लिए भी इसकी उपयोगिता कम नहीं है ।

इधर उच्चतर माध्यमिक विद्यालयों में शिक्षा का माध्यम हिन्दी हो जाने के कारण जो विद्यार्थी महाविद्यालयों में प्रवेश पाते हैं, वे वैज्ञानिक विषय को अंग्रेजी भाषा के माध्यम से समझने में कठिनाई का अनुभव करते हैं । इसलिए भी यह आवश्यक है कि इस विषय का विपुल साहित्य हिन्दी में उपलब्ध हो ।

प्रस्तुत पुस्तक विशेष कर उन विद्यार्थियों के लिए है जो उच्च गणित के अध्ययनार्थ महाविद्यालय में प्रवेश करते हैं । अवकलन और समाकलन, गणित की अत्यधिक उपयोगी शाखाएँ हैं । इस विषय को प्रारम्भिक रूप से ही सरल बनाने के लिए विशेषकर बी०एस-सी० प्रथम भाग के लिए यह पुस्तक प्रस्तुत की गयी है । प्रत्येक सूत्र को केवल सूत्र मानकर नहीं लिखा गया है बल्कि उसे उचित तथा सरल ढंग से समझाया गया है ।

इस पुस्तक को दो भागों में प्रस्तुत किया गया है, प्रथम भाग में अवकलन और दूसरे भाग में समाकलन का विवेचन है । दोनों भागों को अलग-अलग लिखते हुए यह विशेष ध्यान रखा गया है कि दोनों शाखाओं में क्या समरूपता और क्या भिन्नता है ?

विद्यार्थी, गणित या विज्ञान की किसी भी शाखा को पढ़ते ही यह जानने के इच्छुक होते हैं कि इसकी उपयोगिता क्या है ? अध्याय 4 और 5 में अवकलन गणित की उपयोगिता को बतलाया गया है । अध्याय 11 में समाकलन गणित की उपयोगिता को प्रस्तुत किया गया है । इन अध्यायों में विद्यार्थी को यह बतलाया गया है कि क्षेत्रफल, आयतन, स्पर्श और अभिलम्ब रेखाओं से सम्बन्धित प्रश्नों को गणित की इस शाखा से कैसे हल किया जा सकता है । विषय की इस कठिनाई को दूर करने की दिशा में यह एक कदम है ।

पुस्तक में अन्तर्राष्ट्रीय चिह्नों और अंकों का प्रयोग किया गया है । जिन प्रतीकों और सूत्रों की अन्तर्राष्ट्रीय प्रतिष्ठा है, उन्हें उसी रूप में रोमन लिपि में ले लिया गया है । शेष स्थान पर भारत शासन द्वारा स्वीकृत वैज्ञानिक शब्दावली का प्रयोग हुआ है ।

प्रस्तुत पुस्तक के लेखक डा० वाजपेयी स्वयं इस विषय के विद्वान हैं और इस दिशा में ही उन्होंने शोध-कार्य भी किया है । डा० वाजपेयी प्राध्यापक होने के नाते विद्यार्थी समाज की कठिनाई से भी अवगत हैं इसलिए यह पुस्तक अनेक दोषों से मुक्त है ।

संचालक,
मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी

भोपाल :
15 मार्च, 1971

# विषय–सूची



## अवकल गणित

पृष्ठ क्रमांक



## साधारण समाकलन

# अवकल गणित

# अवकल गणित के मुख्य सूत्रों का संग्रह

1. $\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$

2. $\frac{pe^x}{xp}=e^x$

3. $\frac{da^x}{dx}=a^x.\log_e^a$

4. $\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{x}$

5. $\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}.\log_a e$

6. $\frac{d}{dx}\text{Sin } x=\text{Cos } x$

7. $\frac{d}{dx}\cos x=-\text{Sin } x$

8. $\frac{d}{dx}\tan x=\text{Sec}^2 x$

9. $\frac{d}{dx}\text{Cot } x=-\text{Cosec}^2 x$

10. $\frac{d}{dx}\text{Sec } x=\text{Sec } x.\tan x$

11. $\frac{d}{dx}\text{Cosec } x=-\text{Cosec}x\cot x$

12. $\frac{d}{dx}\text{Sin}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $\frac{d}{dx}\text{Cos}^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$

15. $\frac{d}{dx}\text{Cot}^{-1}x=\frac{-1}{1+x^2}$

16. $\frac{d}{dx}\text{Sec}^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

17. $\frac{d}{dx}\text{Cosec}^{-1}x=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

18. $\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m=m(m-1)\ldots\ldots\ldots a^n(ax+b)^{m-n}$

19. $\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^{-1}=(^{-1})^n \underline{|n}.a^n(ax+b)^{-n-1}$

20. $\frac{d^n e^{ax}}{dx^n}=a^n e^{ax}$

21. $\frac{d^n}{dx^n}a^x=(\log_e a)^n.a^x$

22. $\frac{d^n}{dx^n}\log(ax+b)=\frac{(-1)^{n-1}\underline{|n-1}a^n}{(ax+b)^n}$

23. $\frac{d^n}{dx^n}\text{Sin }(ax+b)=a^n \text{Sin}\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

24. $\frac{d^n}{dx^n}\text{Cos }(ax+b)=a^n \text{Cos}\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

25. $\frac{d^n}{dx}\{e^{ax}\text{Sin }(bx+c)\}$
$=r^n e^{ax}\text{ Sin }(bx+c+n\phi)$
$r=\sqrt{a^2+b^2},\ \phi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

26. $\frac{d^n}{dx^n}\{e^{ax}\text{ Cos }(bx+c)\}$
$=r^n e^{ax}\text{ Cos }(bx+c+n\phi)$
$r=\sqrt{a^2+b^2},\ \phi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

# अध्याय: 1

## विषय परिचय तथा परिभाषाएँ

1.1. जिस तरह बीजीय रीतियों (Algebraical Methods) से अंक गणित के प्रश्नों के हल प्राप्त किये जाते हैं, उसी प्रकार से उच्चतर गणित, विज्ञान, यांत्रिकी तथा दूसरे विषयों के प्रश्नों के हल, जो कि गणित की रीतियों से हल किये जाते हैं, कलन (Calculus) द्वारा प्राप्त किये जाते हैं। स्पष्ट रूप से यदि कहा जाय तो कलन गणित की वह शाखा है, जिससे मुख्यत: दो तरह के प्रश्नों का हल किया जाता है।

प्रथम वे प्रश्न हैं, जिससे किसी चर राशि (Variable quantity) के परिवर्तन की दर का बोध हो, उदाहरण के लिए (i) यदि कोई पिण्ड किसी मीनार से गिरता है तो इस पिण्ड की मीनार की चोटी से दूरी समय के अनुसार परिवर्तनशील है, तथा यह भी जान सकते हैं कि किसी खास स्थिति में उस पिण्ड की गति क्या है।

(ii) किसी पिण्ड का त्वरण (Acceleration) उसके उस समय की गति पर निर्भर करता है।

(iii) वृत की परिधि, वृत के अर्धव्यास पर निर्भर करती है।

कलन की वह शाखा जिससे इस तरह के प्रश्नों का हल किया जाता है, अवकल गणित (Differential calculus) कहलाती है।

दूसरे वे प्रश्न हैं जिसमें हमें फलन (Function) ज्ञात करना होता है, जब कि फलन के परिवर्तन की दर ज्ञात होती है। उदाहरण के लिए (i) यदि पिण्ड की गति दी हो तो वह दिए हुए समय में कितना चलता है।

इन उदाहरणों से हमें ज्ञात होता है कि गणित की यह रीति अवकल गणित की रीति के उत्क्रम हैं। अत: "गणित की वह रीति जो अवकल गणित के उत्क्रम हो, समाकल गणित (Integral calculus) कहलाती है।"

## 1.2. अचर और चर (Constant and Variable)

**अचर** (*Constant*) :—"वह राशि जो किसी भी गणितीय संक्रिया के समय अपने मान को निश्चित या अटल रखता है, अचर कहलाता है।"

**चर** (*Variable*) :—"वह राशि जो किसी गणितीय संक्रिया (Mathematical operation) के समय अपने मान को अचर न रखे, वल्कि उसे कोई भी मान दिया जा सके, चर कहलाती है।"

**स्वेच्छ अचर** :—"वे अचर, जिन्हें कोई भी अंकगणितीय मान दिया जा सके, और वे किसी भी गणितीय संक्रिया के समय अपना मान वही रखते हों, स्वेच्छ अचर कहलाते हैं।"

अधिकतर अंग्रेजी भाषा के अंत के अक्षरों (x, y, z) को चर राशियों के लिए उपयोग करते हैं।

स्वेच्छ अचर को लिखने के लिए अधिकतर अंग्रेजी भाषा के प्रारंभिक अक्षरों (a, b, c...) का उपयोग करते हैं।

**निरपेक्ष अचर** (*Absolute constant*) :—"वो राशि जो कि पूरे प्रश्न में वही मान रखता हो निरपेक्ष अचर कहलाती है," जैसे 2, 5, $\sqrt{7}$, $\pi$ आदि।

चर राशि दो प्रकार की होती है

(i) स्वतंत्र चर (Independent variable)

(ii) परतंत्र चर (Dependent variable)

**स्वतंत्र चर** :—"वह चर, जिसे स्वेच्छा से, किसी विशेष प्रश्न में, सीमा के अंतर्गत कोई भी मान दिया जा सके, स्वतंत्र चर कहते हैं।"

**परतंत्र चर** :—"वह चर, जो कि स्वतंत्र चर के मान को निर्धारित करने पर प्राप्त हो, परतंत्र चर कहलाता है।"

यहाँ यह वात विशेष महत्वपूर्ण है कि स्वतंत्र चर और परतंत्र चर आपेक्षिक पद (Relative terms) हैं। किस चर को हम स्वतंत्र और किस चर को हम परतंत्र माने, यह स्वयं की सुविधा पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए किसी भी आयत का क्षेत्रफल उसकी लम्बाई और चौड़ाई पर निर्भर करता है। इसमें क्षेत्रफल परतंत्र चर है तथा लम्बाई और चौड़ाई स्वतंत्र चर हैं। यदि हम चाहें तो यह भी कह सकते हैं कि आयत की लम्बाई और चौड़ाई उसके क्षेत्रफल पर निर्भर करती हैं। इस कथन में क्षेत्रफल स्वतंत्र चर है तथा लम्बाई और चौड़ाई परतंत्र चर राशियाँ हैं।

## 1.3. फलन (Function)

"जब दो चर राशियाँ आपस में इस तरह से सबंधित हों कि पहले का मान, दूसरे को कुछ मान दिये जाने पर प्राप्त हो, तो पहला चर दूसरे चर का फलन कहलाता है ।"

फलन स्वयं ही एक परतंत्र चर है और जिस चर को कुछ मान दिया जाता है, वह स्वतंत्र चर होता है ।

**उदाहरण:—**

1. किसी त्रिभूज का क्षेत्रफल $\triangle = \frac{1}{2}\, x\, y \sin\theta$ है । x और y त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाइयां हैं, और $\theta$ उनके वीच का कोण है । यहां $\triangle$ परतंत्र चर है, तथा क्षेत्रफल $\triangle$; x, y और $\theta$ स्वतंत्रचर राशियों पर निर्भर करता है । $\triangle$ को x, y और $\theta$ का फलन कहते हैं ।

यदि इसी क्षेत्रफल के समीकरण को $\sin\theta = \dfrac{2\triangle}{x\,y}$ की तरह लिखें तो इसमे $\theta$ परतंत्र चर हैं, तथा $\triangle$, x, y स्वतंत्र, चर राशियां हैं । यहां $\sin\theta$; x, y और $\triangle$ का फलन है ।

2. $y = ax^2 + bx + c$, में y परतंत्र चर है, x स्वतंत्र चर, तथा a, b और c स्वेच्छ चर हैं । y को x चर का फलन कहते हैं ।

3. $y = x^2$, जहाँ कि x कोई पूर्णांक संख्या है और y उसका वर्ग है ।

यहाँ x स्वतंत्र चर है, और y परतंत्र चर है । यदि $x = \sqrt{y}$ लिखें तो y स्वतंत्र चर और x परतंत्र चर हो जाता है ।

## 1.4. चर का प्रभाव क्षेत्र (Domain of the Variable)

यदि हम चर की उन संख्यात्मक मानों पर विचार करें, जोकि ५ और १० के बीच आते हैं, तथा उन सभी संख्याओं को साथ लें, तो हम इसे दिये हुए चर का प्रभाव क्षेत्र कहते हैं । यदि 5 और 10 दोनों ही प्रभाव क्षेत्र में आते हों तो उस प्रभाव क्षेत्र का बंद क्षेत्र या संवृत क्षेत्र (Closed domain) कहते हैं । यदि ५ और १० दोनों ही प्रभावक्षेत्र में न आते हों तो इस क्षेत्र को खुला क्षेत्र या विवृत क्षेत्र (Open domain) कहते हैं ।

## 1.5. स्पष्ट और अस्पष्ट फलन (Explicite and Implicite Function):

स्पष्ट फलन उसे कहते हैं जो स्पष्ट रूप से स्वतंत्र चरों द्वारा दर्शाया जा सके। उदाहरणार्थ

$y=\log x$, $y=r \sin \theta$, $y=x^2+2ax+b$.

इन प्रत्येक उदाहरणों में y स्पष्ट रूप से स्वतंत्र चर राशियों द्वारा दर्शाया गया है, अतः y एक स्पष्ट फलन है।

यदि कोई फलन परतंत्र चरों द्वारा स्पष्ट रूप से दर्शाया न जा सके तो वह फलन अस्पष्ट फलन कहलाता है। जैसे

(i) $x^2y^2=\sin x+(a^2-y^2)(b+y)^2$

(ii) $\log y=ayx+cx^2$

प्रत्येक उदाहरणों में फलन y, स्वतंत्र चर x का अस्पष्ट फलन है।

## 1.6. प्रतिलोम फलन (Inverse function)

यदि दो चरों x और y में कोई एक सम्बन्ध स्थापित हो, तो साधारणतः y को x का फलन अथवा x को y का फलन कहते हैं। इसमें से किसी एक को अपनी सुविधा अनुसार प्रतिलोम फलन कहते हैं। उदाहरण के लिए:—

(i) $y=\sin x$, यहाँ y, x का फलन है और यदि $x=\sin^{-1}y$ लिखा जाए तो x, y का प्रतिलोम फलन कहलाता है।

(ii) $y=\sqrt{x}$, यहाँ y, x का फलन है, और $x=y^2$ लिखने पर x, y का प्रतिलोम फलन कहलाता है।

## उदाहरणमाला 1

1. यदि $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-1}$ हो तो, $f(0)$, $f(-1)$ और $f(3)$ का मूल्य निकालो।

दिए हुए फलनिक सम्बन्ध में $x=0$, $x=-1$ और $x=3$ क्रमशः रखने पर निम्नांकन प्राप्त होता है।

$$f(0)=\frac{0+2}{0-1}=-2.$$

$$f(-1)=\frac{1+2}{-1-1}=-\frac{3}{2}$$

$$f(3)=\frac{9+2}{3-1}=\frac{11}{2}$$

2. यदि $f(x)=\sin x$ और $F(x)=\cos x$ हों तो सिद्ध करो कि
$f(2x)=2.\ f(x).\ F(x)$ होगा।

दिए हुए फलनिक सम्बन्ध में $x$ की जगह $2x$ रखने पर

$$f(2x)=\sin 2x=2\sin x \cos x$$
$$=2f(x).\ F(x).$$ [दिए हुए सम्बंधों से]

3. यदि बन्द प्रभाव क्षेत्र $[-2,2]$ में
$f(x)=3x+4$ हो, तो $f\left(\frac{5}{2}\right)$ का मान ज्ञात करो।

चूंकि फलन $f(x)$ का बन्द प्रभाव क्षेत्र $[-2,2]$ ही है, अतः $x=2\frac{1}{2}$ पर फलन निश्चित स्पष्ट नहीं है।

## प्रश्नावली 1

1. यदि $f(x)=x^3-5x^2-4x+20$, तो सिद्ध करो कि
$f(1)=12$, $f(7)=5\ f(-1)$ होगा।

2. यदि $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$ हो, तो $f(x)$ का मान $x=3$ के सापेक्ष ज्ञात करो।

3. यदि $F(\theta)=\sin 2\theta+\cos\theta$ हो, तो $F(o)$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ और $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ के मानों को ज्ञात करो।

4. यदि $f(x)=\sin x+\tan x$ हो, तो $f(o)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ और $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ के मानों को लिखो।

5. यदि $f(y)=y^2-2y+6$ है तो सिद्ध करो कि
$f(x+h)=y^2-2y+6+2(y-1)h+h^2$

6. यदि $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)$ है तो सिद्ध करो कि $f(x+h)-f(x)=\dfrac{-h}{x^2+xh}$

7. यदि $f(x)=\log x$ है, तो सिद्ध करो कि $f(u,b)=f(u)+f(b)$

8. यदि $f(x)=\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right)$ है तो सिद्ध करो कि

$$f(a^3)=-3 \text{ और } f\left(a-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}$$

9. यदि $\phi(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\phi(y)+\phi(z)=\phi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right) \text{ है ।}$$

10. सिद्ध करो कि $\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=h+2a+3$

जबकि $F(x)=x^2+3x$

11. $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ का मान निकालो,

जहाँ $F(x)=3x+4$ हो ।

## 1.7. फलन की सीमा (Limit of a Function)

फलन की सीमा की परिभाषा देने के पूर्व हम चर की सीमा के विषय में चर्चा करेंगे, तथा उसकी परिभाषा का अध्ययन करेंगे ।

चर की सीमा के विषय में हम पूर्व परिचित हैं क्योंकि वृत्त का क्षेत्रफल भी सीमा की सहायता से ही निकाला जाता है, जिसमें कि हम अंतर्गत बहुभुज क्षेत्र की भुजाओं को अनिश्चित ले लेते हैं । इसका क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल की ओर उपगमन होता है और इसकी सीमा ही वृत का क्षेत्रफल है ।

अब हम चर की सीमा को परिभाषित करेंगे ।

**चर की सीमा**:—"जब कोई चर v का मान अचर $l$ की ओर इस तरह उपगमन करे कि $(v-l)$ का संख्यात्मक मान किसी धनात्मक संख्या $\epsilon$ (जो कि चाहे जितना भी छोटे से छोटा है) से छोटा होता है, तो अचर l, चर v की सीमा कहलाती है ।" इसे निम्न प्रकार से लिखते हैं:—

$$\lim v=l$$

**फलन की सीमा**:—"किसी भी फलन की सीमा, स्वतंत्र चर से किसी दिए हुए मान पर, फलन का वह मान है, जो कि फलन से एक निर्दिष्ट राशि (जो कि चाहे जितना छोटे से छोटा क्यों न हो) से कम हो जबकि स्वतंत्र चर दिए हुए मान के पर्याप्त करीब हो ।" फलन की सीमा की परिभाषा को निम्न प्रकार से भी दे सकते हैं ।

राशि L, फलन f(x) की x=a पर फलन की सीमा कहलाती है, यदि

$$| f(x)-L | < \epsilon$$

जबकि $\quad | x-a | < \delta$

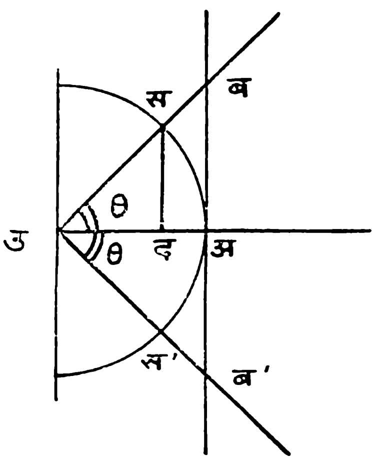
गणितीय भाषा में फलन की सीमा को निम्न प्रकार से लिखते हैं ।

$$\lim_{x\to a} f(x)-L \text{ या } \lim_{x\to a} f(x)=L.$$

## 1.8. कुछ आवश्यक फलनों की सीमाएँ:-

(i) $\lim_{\theta\to o} \frac{\sin\theta}{\theta}=1.$

माना कि प्रत्येक कोण ब उ अ और ब' उ अ का वृतीय मान θ है, जहाँ $o<\theta<\frac{\pi}{2}$ है यदि θ बहुत छोटा हो तो




△ उ द स < त्रिज्या खण्ड उ अ स का क्षेत्रफल < △ उ अ ब . . . . (i)

क्योंकि △ उ द स $=\frac{1}{2}r\cos\theta.\ r\sin\theta$

त्रिज्या खण्ड उ अ स का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}r^2\theta$

और △ उ अ ब $=\frac{1}{2}r.\ r\sin\theta$

इस तरह ऊपर लिखी हुई असमिका (Inequality) द्वारा $\frac{1}{2}r^2\cos\theta.\ \sin\theta<\frac{1}{2}r^2\theta<\frac{1}{2}r^2\tan\theta$ है,

इस असमिका को $\frac{1}{2}r^2\sin\theta$ से भाग देने पर

$$\cos\theta<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta} \text{ प्राप्त होता है } \quad \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

यदि θ शून्य की ओर उपगमन करे, तो cos0 और $\frac{1}{\cos 0}$ दोनों का ही मान 1 है, अतः असमिका (ii) से फलन $\frac{\theta}{\sin\theta}$ का मान 1 होगा। अतः

$$\lim_{\theta\to o} \frac{\sin\theta}{\theta}=1.$$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)$ को द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem) द्वारा प्रसार करने पर हमें निम्न लिखित प्राप्त होता है,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{|\underline{2}}\cdot\frac{1}{n^2}\ \cdots\cdots\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{|\underline{2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{|\underline{3}}\ \cdots\cdots\right]$$

$$=1+1+\frac{1}{|\underline{2}}+\frac{1}{|\underline{3}}\ \cdots\cdots$$

चूंकि $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, . . . सीमा का मान शून्य ले सकते हैं, यदि $n\to\infty$; अतः

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

1.9. नीचे लिखे हुए आवश्यक प्रसारणों को विद्यार्थियों को याद रखना चाहिये ।

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{|\underline{2}}+\frac{x^3}{|\underline{3}}+\ \cdots\cdots$

2. $a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2(\log_e a)^2}{|\underline{2}}+\ \cdots\cdots$

3. $\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ \cdots\cdots$

4. $\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{3}\ \cdots\cdots$

5. $\cos x\pm 1-\frac{x^2}{|\underline{2}}+\frac{x^4}{|\underline{4}}\ \cdots\cdots$

6. $\sin x=x-\frac{x^3}{|\underline{3}}+\frac{^5}{|\underline{5}}\ \cdots\cdots$

7. $\tan^{-1}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\ \cdots\cdots$

## उदाहरणमाला 2

1. मान निकालो $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

यहाँ यदि हम $x=3$ फलन में रखें तो फलन का मान $\frac{0}{0}$ का रूप होता है जो कि अनिर्धार्य रूप (Indeterminent form) है, अतः $x=3+h$ दिए हुए फलन में रखने पर, जब कि $h\to o$,

$$\lim_{x+3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{h\to o}\frac{(3+h)^2-9}{(3+h)-3}=\lim_{h\to o}\frac{9+6h+h^2-9}{h}$$

$$=\lim_{h\to o} 6+h$$

$$=6 \text{ होगा}$$

2. सिद्ध करो कि—

$$\lim_{n\to o}\frac{a^x-b^x}{x}=\log_e\frac{a}{b}$$

यह भी $\frac{0}{0}$ का रूप है अतः $a^x$ और $b^x$ का प्रसार करने पर

$$\lim_{x\to o}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to o}\frac{e^{x\log a}-e^{x\log b}}{x}$$

$$=\lim_{x\to o}\left\{\left[1+x\log a+\frac{(x\log a)^2}{\underline{|2}}\cdots\cdots\right]-\left[1+x\log b+\frac{(x\log b)^2}{\underline{|2}}\cdots\cdots\right]\right\}x$$

$$=\lim_{x\to o}\frac{x\left[\left\{\log a+x\frac{(\log a)^2}{\underline{|2}}+\frac{x^2(\log a)^3}{3}\cdots\right\}\right.}{x}$$

$$\frac{\left.-x\left[\left\{\log b+\frac{x(\log b)^2}{\underline{|2}}\cdots\cdots\right\}\right]\right.}{x}$$

$$=\log a-\log b=\log_e\frac{a}{b}$$

3. सिद्ध करो कि $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x}=2$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 2.\sin x$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

४. सिद्ध करो कि – $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} , \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \times \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= 1$$

## प्रश्नावली 2

निम्नलिखित का मान निकालो:—

1. $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 3}$

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^7 - 2x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$

4. $\lim_{x \to a} \frac{x^3 - 3a^2x + 2a^3}{2x^3 - 3ax^2 + a^3}$

5. $\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ [Raj T.D.C. 1961, 1963]

7. $\lim_{x \to 1} \frac{\sin bx}{b}$

8. $\lim_{x \to \pi} \frac{1 + \cos x}{\tan^2 x}$ [Raj. T.D.C. 1962]

9. $\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^x}{x}$ [Raj. T.D.C. 1961]

**सिद्ध करो कि–**

10. $\lim_{x \to o} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = 1$

11. $\lim_{n \to o} \frac{\sqrt{1+x} \quad - \sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{2}$

12. $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1$

# अध्यायः 2

## साधारण फलनों का अवकलन (Differentiation)

2.1. **परिभाषा–** यदि f (x) स्वतंत्र चर x का फलन है और

$$\lim_{h \to o} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \ldots\ldots\ldots(i)$$

का अस्तित्वः हो, तो यह मान फलन f (x) का x=a पर अवकल गुणांक (Differential coefficient) कहलाता है।

यदि व्यंजक (i) का अस्तित्व न हो तो f(x) का x=a पर अवकल गुणांक का अस्तित्व नहीं होता है। अवकल गुणांक को साधारणतया

$$\frac{d\,f(x)}{dx}\ ,\ f(x) \text{ या } D\,f(x)$$

से लिखते हैं।

**टिप्पणीः**–यहाँ पर यह ध्यान देने योग्य है कि $\frac{d\,f(x)}{dx}$ का मतलब यह नहीं है कि d f(x) को dx से भाग दिया गया है क्योंकि d f(x) और dx स्वतंत्र रूप से इस परिभाषा से कोई मतलब नहीं रखते हैं। यह ठीक उसी तरह का है जैसे कि यह कहा जाय कि sin x; sin और x का गुणनफल है। यहाँ $\frac{d}{dx}$ एक संक्रिया (Operation) का प्रतीक (Symbol) है।

### 2.2. **अवकल गुणांक की वैकल्पिक परिभाषा (Alternative definition of differential coefficient)**

माना कि y, चर x का संतत (Continuous) फलन है। x और y के दो

मानों का अन्तर क्रमशः $\delta x$ और $\delta y$ है। इसलिए $\frac{\delta y}{\delta x}$ फलन y की, x के संदर्भ में, परिवर्तन की दर होगी। अतः यह जैसे जैसे $\delta x$ शून्य की ओर उपगमन करता है, वैसे $\delta y$ भी शून्य की ओर उपगमन करेगा। अतः $\frac{\delta y}{dx}$, $\frac{0}{0}$ का रूप है, जो कि अनिर्धारित रूप है। इसलिए इस परिवर्तन की दर को अवकल गणित द्वारा परिभाषा देते हैं। $\frac{\delta y}{dx}$ की सीमा, जबकि $\delta x$ शून्य की ओर उपगमन करे, तो यह सीमा y का, x के संदर्भ में, अवकल गुणांक कहलाता है।

## 2.3. $x^n$ का अवकल गुणांक [Differential coefficient of $x^n$]

माना कि $f(x) = x^n$ है

$\therefore \quad f(x+h) = (x+h)^n$

इसलिए अवकल गुणांक की परिभाषा द्वारा

$$\frac{dx^n}{dx} = \lim_{h \to o} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{x^n \left[1+\frac{h}{x}\right]^n - x^n}{h}$$

यहाँ h शून्य की ओर उपगमन करता है अर्थात् $\frac{h}{x}$ का संख्यात्मक मान संख्या एक से कम होगी। इसलिए $\left(1+\frac{h}{x}\right)^n$ को द्विपद प्रमेय (Blnomial Theorun) द्वारा प्रसार कर सकते हैं। अतः

$$\frac{dx^n}{dx} = \lim_{h \to o} \frac{x^n \left[1+n\frac{h}{x}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\frac{h^2}{x^2}+\ldots+\frac{h^n}{x^n}-1\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{x^n \cdot h \left[n\frac{1}{x}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\frac{h}{x^2}+\ldots+\frac{h^{n-1}}{x^n}\right]}{h}$$

क्योंकि h का मान शून्य नहीं है, इसलिए

$$= \lim_{h \to o} x^n \left[\frac{n}{x}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\frac{h}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{x^n}\right]$$

$=\lim_{h\to o} x^n\Big[\frac{n}{x}+h\times$ (एक परिमित व्यंजक है, क्योंकि n परिमित है,

यदि n परिमित नहीं है तो यह एक अभिसारी व्यंजक है

जिसका मूल्य $\infty$ नहीं होगा ) $\Big]$

$$=\lim_{h\to o} x^n \left[\frac{n}{x} + h \times \text{परिमित व्यंजक}\right]$$

$$=x^n \cdot \frac{n}{x}$$

$$=n\, x^{n-1}$$

अत:

$$\frac{dx^n}{dx}=n\, x^{n-1}$$

## 2.4. अचर का अवकल गुणांक

माना कि k कोई अचर है। जिसका मान $f(x)=k$ है।

तो $f(x+h)=k$, क्योंकि k एक अचर राशि है। इसलिए

$$\frac{dk}{dx}=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{k-k}{h}=o$$

अत: अचर राशियों का अवकल गुणांक शून्य होता है।

## 2.5. x का फलन y और अचर k के गुणनफल का अवकल गुणांक

माना कि $f(x)=k\,\phi(x)$

$\therefore\quad f(x+h)=k\,\phi(x+h)$

इसलिए

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\lim_{h\to o}\frac{K\phi(x+h)-K\phi(x)}{h}$$

$$=K\lim_{h\to o}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

$$=K\frac{d}{x}\phi(x).$$

इसलिए किसी ऐसे फलन का अवकल गुणांक जो कि अचर और फलन का गुणनफल हो, फलन के अवकल गुणांक और अचर के गुणनफल के बराबर होता है।

## 2.6. दो या अधिक फलनों के योग का अवकल गुणांक।

माना कि $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$

तो $f(x+h)=f_1(x+h)+f_2(x+h)$

इसलिए

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to o}\frac{f_1(x+h)+f_2(x+h)-f_1(x)-f_2(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}f_1(x)+\frac{d}{dx}f_2(x)$$

अत: दो फलनों के योग का अवकल गुणांक, उन दोनों फलनों के अवकल गुणांक के योग के बराबर होता है।

इसी तरह से हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{d}{dx}\{f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\ldots\pm f_n(x)\}$$

$$=\frac{d}{dx}f_1(x)\pm\frac{d}{dx}f_2(x)\pm\frac{df_3}{dx}+\ldots\ldots\pm\frac{df_n(x)}{dx}$$

## 2.7. $e^x$ का अवकल गुणांक

माना कि $f(x)=e^x$

अत: $f(x+h)=e^{x+h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}e^x=\lim_{h\to o}\frac{e^{x+h}-e^h}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}e^x.\frac{e^h-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}e^x\frac{1+h+\frac{h^2}{\underline{|2}}\ldots\ldots\infty-1}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} e^x \frac{h\left(1+\frac{h}{\lfloor 2}+\frac{h^2}{\lfloor 3}\cdots\cdots\right)}{h}$$

$\lim_{h \to o} e^x$ [1 + h × एक अभिसारी व्यंजक जिसका मूल्य ∞ नहीं होता है । ]

$$= e^x$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

## 2.8. Log x का अवकल गुणांक

माना कि $f(x)=\log x$

तो $f(x+h)=\log(x+h)$

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \lim_{h \to o} \frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$= \lim_{\to o} \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3\cdots\cdots}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{\frac{h}{x}\left(1-\frac{1}{2}\frac{h}{x}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^2\cdots\cdots\right]}{h}$$

$= \lim_{h \to o} x^{-1}$ [ 1+ (एक अभिसारी व्यंजक जिसका मूल्य ∞ नहीं है) × h ]

$$= x^{-1}$$

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$$

## 2.9. $\log_a x$ का अवकल गुणांक निकालो

माना कि $f(x) = \log_a x$

$$= \log_e x . \log_a e$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (\log_a{}^e . \log_e{}^x)$$

$$= \log_a{}^e \cdot \frac{d}{dx} \log_e{}^x$$

$$= \frac{1}{x} . \log_a{}^e$$

अत:

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} . \log_a{}^e$$

## 2.10. उदाहरणमाला 3

1. $5x^{10}$ का अवकल गुणांक निकालो

$$\frac{d}{x} (5x^{10}) = 5 \frac{d}{dx} x^{10} = 5 \times 10^{10-1}$$

$$= 50x^9$$

2. $x^{-5/4}$ का अवकलन करो।

$$\frac{d}{x} x^{-5/4} = -\frac{5}{4} x^{-5/4 - 1}$$

$$= -\frac{5}{4} x^{-9/4}$$

3. $\frac{d}{dx} (x^n + a^n)$ को हल करो

$$\frac{d}{dx} (x^n + a^n) = \frac{dx^n}{dx} + \frac{da^n}{dx}$$

$$= nx^{n-1}$$

4. $\frac{d}{dx} (x^{-5} + 3e^x)$ को हल करो।

$$\frac{d}{dx} (x^{-5} + 3e^x) = \frac{d}{dx} (x^{-5}) + \frac{d}{dx} (3 e^x)$$

$$= -5 x^{-5-1} + 3 e^x$$

$$= -5 x^{-6} + 3 e^x$$

5. $\frac{d}{dx} (4 x^3 + \log_e x^{-5})$ को हल करो

$$\frac{d}{dx} (4x^3 + \log_e x^{-5}) = 12x^2 + (-5) \frac{d}{dx} \text{lox } x$$

$$= 12x^2 - 5\ \frac{1}{x}$$

## प्रश्नावली 3

**नीचे लिखे हुए फलनों का अवकल गुणांक निकालो:—**

1. $x^3, x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt{x}, \sqrt{x^3}, \sqrt{x^{\frac{3}{5}}}$
3. $a^5, 2x^2, \frac{6}{x^7}, 4\frac{1}{x^4}$
4. $x^3+2,\ x+\frac{1}{x},\ 5x^2+\frac{7}{x}$
5. $e^x+7x,\ 3e^x+x^{10}$
6. $\log x^{10},\ 5\log x,\ a\log x^{10}$
7. $3e^x+6\log x^{\frac{1}{8}}+8x^3$
8. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$
9. $ax^2+bx+e+10\log x^{10}+5_e{}^x$
10. $\cdot 1+x+\frac{1}{\underline{|2}}x^2+\frac{1}{\underline{|3}}x^3+\ldots.$
11. $6\log x-\sqrt{x}-7$
12. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$
13. $\left(4x^{\frac{1}{3}}+e^x\right)\left(4x^{\frac{1}{3}}-e^x\right)$
14. $x^n+n\log_a{}^x$

### 2.11 Sin x का अवकल गुणांक

माना कि $f(x) = \sin x$

तो $f(x+h) = \sin(x+h)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \lim_{hyo} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \times \lim_{h \to o} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos x$$

क्योंकि

$$\lim_{h \to o} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

और $\lim_{h \to o} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1.$ हैं।

## 2.12 Cos x का अवकल गुणांक

माना कि $f(x) = \cos x$

और $f(x+h) = \cos(x+h)$

$$\frac{d}{dx} \cos x = \lim_{h \to o} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{-2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= -\lim_{h \to o} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\sin x$$

क्योंकि $\lim_{h \to o} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = \sin x$

और $\lin_{h \to o} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ है।

अत: $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

## 2.13 उदाहरणमाला 4

1. $\frac{d}{dx}(x+3\sin x)$ का मान निकालो

$$\frac{d}{dx}(x+3\sin x)=\frac{d}{dx}(x)+3\frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$=1+3\cos x.$$

2. $a\,x^n+b\,e^x+e\sin x$ को x के सापेक्ष में अवकलन करो

$$\frac{d}{dx}(a\,x^n+b\,e^x+c\sin x)$$
$$=a\frac{d\,x^n}{dx}+b\frac{d}{dx}e^x+c\frac{d}{dx}\sin x$$
$$=n\,a\,x^{n-1}+b\,e^x+c\cos x$$

3. $\frac{d}{dx}\left(m\sin x-n\cos x-2\log x^{-\frac{1}{2}}\right)$ को हल करो

$$\frac{d}{dx}\left(m\sin x-n\cos x-2\log x^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$=m\cos x+n\sin x+\frac{1}{x}$$

## प्रश्नावली 4

1. $4\,x^3+3\sin x$
2. $(a\,x)^m+b^m+5\cos x$
3. $\cos x+\log x^{10}+e^x$
4. $a\sin x+b\log x$
5. $\sqrt{2}\sin x+x^{10}$
6. $a\,x^{15}+15\,e^x$

# अध्याय: 3

## अवकलन की रीतियाँ
## (Methods of Differentiation)

### 3.1 दो फलनों के गुणनफल (Product) का अवकलगुणांक:—

माना कि

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$$

इसलिए $f(x+h)=f_1(x+h)\cdot f_2(x+h)$

अब अवकल गुणांक की परिभाषा से

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{f_1(x+h)\cdot f_2(x+h)-f_1(x)\,f_2(x)}{h}$$

अंश में $f_1(x+h)\,f_2(x)$ को घटाने और जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$$=\lim_{h\to o}\frac{f_1(x+h)f_2(x+h)-f_1(x+h)\cdot f_2(x)+f_1(x+h)f_2(x)-f_1(x)f_2(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{f_1(x+h)\{f_2(x+h)-f_2(x)\}+f_2(x)\{f_1(x+h)-f_1(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\left[f_1(x+h)\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}+f_2(x)\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}\right]$$

जब $h\to o$, तो $f_1(x+h)=f_1(x)$ होगा।

$$\lim_{h\to o}\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}=\frac{df_2(x)}{dx}$$

और $\displaystyle\lim_{h\to o}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}=\frac{df_1(x)}{dx}$,

अवकल-गुणांक की परिभाषा से।

इसलिए

$$\frac{d}{dx}\{ f_2 (x)\cdot f_1 (x)\}=f_1 (x) \frac{df_2(x)}{dx} +f_2(x) \frac{df_1(x)}{dx}$$

**अतः, दो फलनों के गुणनफल का अवकल गुणांक = प्रथम फलन × द्वितीय फलन का अवकल गुणांक + द्वितीय फलन × प्रथम फलन का अवकल गुणांक ।**

## 3.2 उदाहरणमाला 5

1. $\frac{d}{dx}(x^5 . \sin x)$ को हल करो ।

इसमें $x^5$ पहले और उसके बाद $\sin x$ लिखा है, इसलिए $x^5$ को पहला और $\sin x$ को दूसरा फलन लेते हैं । यह बिल्कुल आवश्यक नहीं है कि पहले लिखे हुए फलन को ही पहला फलन मानना चाहिए, यदि हमें सुविधा है तो बाद में लिखे फलन को भी पहला फलन और पहले लिखा हुआ फलन को दूसरा फलन मान लेते हैं । इसलिए

$$\frac{d}{dx}(x^5 \sin x) = x^5\frac{d}{dx}\sin x+\sin x \frac{d}{dx}x^5$$

$$= x^5 \cos x + \sin x\, 5x^4$$

$$= x^5 \cos x + 5x^4 \sin x.$$

2. $(2x^2 + ax + b) ( \log x + \sin x )$ का अवकलगुणांक निकालो ।

$$\frac{d}{dx}(2x^2 + ax + b) ( \log x + \sin x )$$

$$= (2x^2+ax+b) \frac{d}{dx}(\log x+\sin x)+(\log x+\sin x)\frac{d}{dx}(2x^2+ax+b)$$

$$= (2x^2+ax+b) \left[\frac{d}{dx}\log x + \frac{d}{dx}\sin x\right] +(\log x+ \sin x) \left[\frac{d2x^2}{ax} + \frac{d(ax)}{dx} + \frac{d(b)}{dx}\right]$$

$$= (2x^2+ax+b) \left[\frac{1}{x} + \cos x\right] + (\log x+\sin x)(4x+a).$$

## प्रश्नावली 5

### निम्नलिखित फलनों के अवकल गुणांक निकालो ।

1. $e^x . \sin x$
2. $\cos x \log x$
3. $e^x . \log_a x$
4. $e^x . \cos x$
5. $8\sqrt{x} . \log x$
6. $x^3 . \log_e x$
7. $e^x . \sqrt{x}$
8. $\log x . \log_a x$
9. $2x^3 e^x + 3\sqrt{x} . \log_e x$
10. $\log_a x + \log_e x^a .$
11. $\log x^{x10}$
12. $(x^3+x^4)(\cos x + e^x)$
13. $x . \sin x . \log x$
14. $\sin 2x$
15. यदि $y = (x-5)(x-3)$ हो, तो सिद्ध करो कि वक्र (curve) पर बिन्दु $x=4$ पर $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

### 3.3. दो फलनों के भागफल (Quotient) का अवकल गुणांक:–

माना कि $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

इसलिए $f(x+h) = \dfrac{f_1(x+h,)}{f_2(x+h)}$

अवकल गुणांक की परिभाषा से

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right\} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} - \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to o} \frac{f_1(x+h).f_2(x) - f_1(x).f_2(x+h)}{h\, f_2(x+h).\, f_2(x)}$$

अंश में $f_1(x) \cdot f_2(x)$ को घटाने और जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है,

$$= \lim_{h\to o} \frac{f_1(x+h)f_2(x) - f_1(x)f_2(x) + f_1(x)f_2(x) - f_1(x)f_2(x+h)}{h\, f_2(x+h) .\, f_2(x)}$$

$$= \lim_{h\to o} \frac{f_2(x)[f_1(x+h) - f_1(x)] - f_1(x)[f_2(x+h) - f_2(x)]}{h\, f_2(x+h)\, f_2(x)}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{f_2(x)\ \dfrac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}-f_1(x)\ \dfrac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}}{f_2(x+h)\ f_2(x)}$$

$$=\frac{f_2(x)\ \lim\limits_{h\to o}\dfrac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}-f_1(x)\ \dfrac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}}{f_2\ (x+h)\ f_2(x)}$$

अवकल गुणांक की परिभाषा से

$$\lim_{h\to o}\ \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}=\frac{d}{dx}\ f_1(x)$$

और

$$\lim_{h\to o}\ \frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}=\frac{d}{dx}\ f_2(x)$$

इसलिए

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right\}=\frac{f_2(x)\ \dfrac{d}{dx}f_1(x)-f_1(x)\ \dfrac{d}{dx}\ f_2(x)}{[f_2\ (x)]^2}$$

इस तरह दो फलनों के भागफल का अवकल गुणांक

$$=\frac{[\text{हर}\times\text{अंश का अवकल गुणांक}-\text{अंश}\times\text{हर का अवकल गुणांक}]}{\text{हर का वर्ग}}$$

## 3.4 उदाहरणमाला 6

1. $\dfrac{x^2}{e^x+x^2}$ का अवकल गुणांक निकालो ।

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^2}{e^x+x^2}\right\}=\frac{(e^x+x^2)\ \dfrac{d}{dx}(x^2)-x^2\ \dfrac{d}{dx}\ (e^x+x^2)}{(e^x+x^2)^2}$$

$$=\frac{(e^x+x^2).\ 2x-x^2\ (e^x+2x)}{(e^x+x^2)}$$

$$=\frac{2xe^x+2x^3-x^2e^x-2x^3}{(e^x+x^2)^2}$$

$$=\frac{xe^x\ [2-x]}{(e^x+x^2)^2}$$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ को हल करो

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$=\frac{(1+\cos x)\frac{d}{xp}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(1+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\tfrac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}.$$

## प्रश्नावली 6

अवकल गुणांक निकालो

1. $\dfrac{\text{Cos } x}{\log x}$

2. $\dfrac{a x^2+b}{\sin x+\cos x}$

3. $\dfrac{x^n}{\log x}$

4. $\dfrac{5x^2+6x+7}{2x^2+3x+4}$

5. $\dfrac{e^x}{x}$

6. $\dfrac{e^x+\sin x}{1+\log x}$

7. $\dfrac{x^2-1}{\log x}$

8. $\dfrac{e^x(x-1)}{x+1}$

9. $\dfrac{e^x+\cos x}{\log x-x^n}$

10. $\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$ [विक्रम वि. वि. १९६२]

11. $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ [उ. प्रदेश १९६४]

12. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$ [राजस्थान १९५३]

13. $\dfrac{1}{\sin x}$

14. $\dfrac{x^2}{\sec x}$

15. $\dfrac{x^3\sin x}{e^x}$, $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$, $\dfrac{x^3}{e^x\sin x}$

### 3.5 tan x का अवकल गुणांक

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{\cos x\frac{d}{dx}\sin x-\sin x\frac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x.\ \cos x-\sin x\,(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$=\sec^2 x$$

इसलिए,

$$\frac{d\tan x}{d\,x}=\sec^2 x \text{ है ।}$$

### 3.6 cot x का अवकल गुणांक

$$\frac{d}{d\,x}\cot x=\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$=\frac{\sin x\frac{d}{d\,x}\cos x-\cos x\frac{d}{d\,x}(\sin x)}{(\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$=-\operatorname{cosec}^2 x$$

अत:

$$\frac{d}{d\,x}\cot x=-\operatorname{cosec}^2 x \text{ है ।}$$

### 3.7 sec x का अवकल गुणांक

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(1) - 1.\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x \times o + \sin x. 1}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \tan x. \sec x$$

इसलिए

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x. \sec x. \text{ है ।}$$

### 3.8 cosec x का अवकल गुणांक

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\text{sen } x. \frac{d}{dx}(1) - 1. \frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\cot x. \operatorname{cosec} x$$

इसलिए

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\cot x. \operatorname{cosec} x. \text{ है ।}$$

## प्रश्नावली 7

नीचे लिखे हुए फलनों का अवकल गुणांक निकालो ।

1. $\frac{3+\tan x}{5x+7}$

2. $\frac{x^x}{\log_a x}$

3. $\frac{\sqrt{ax}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$

4. $\frac{e^x+\tan x. x^2}{\cot x - x^n}$

5. $\frac{\tan x+\cot x}{\log x}$

6. $\frac{e^x+\tan x}{\cot x - x^n}$ [विक्रम १९६१]
[राजस्थान १९६१]

7. सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{1-\sin 2x}$$

यदि
$$y=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

निम्न को अवकलित करो ।

8. cesec x — 7 $x^2$ , sec x—log x. sin x

9. cosec x. log x , sec x. $e^x$

10. sin x. $\log_a x$. $e^x$

## 3.9 फलनों के फलन का अवकलन
## (Differentiation of function of function)

फलन के फलनों का अवकलन निकालने से पहले हम "फलनों के फलन" की परिभाषा का अध्ययन करेंगे ।

### परिभाषा

कभी कभी y, स्वतंत्र चर x का सीधा फलन न होकर, एक दूसरा चर v का फलन होता है । इस तरह से y, v का फलन है और v, x का फलन है इसलिए y, x का फलन, v के द्वारा है । इस तरह y, फलन का फलन कहलाता है ।

उदाहरण के लिए, यदि फलन log sin x पर विचार करें तो यह साफ मालूम है कि log sin x, फलन sin x, पर निर्भर करता है, और स्वयम् sin x, चर x पर निर्भर करता है । इसलिए, फलन log sin x, sin x का फलन है और sin x, x का फलन है । अतः log sin x, फलन का फलन है ।

माना कि

$$y=f(x)=f_1\{f_2(x)\}$$

इसलिए $f(x+h)=f_2\{f_2(x+h)\}$

यदि $f_2(x)=t$, और $f_2(x+h)=t+k$

अर्थात् जैसे ही $h\to o$, को उपगमन करता है $f_2(x+h)\to f_3(x)$ उपगमन होता है । और जैसे ही $h\to o$

त्योंही $k\to o$

इसलिए

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d\{f_1\{f_2(x)\}\}}{dx}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{f_1\{f_2(x+h)\}-f_1\{f_2(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{f_1(t+k)-f_1(t)}{h} \cdot \frac{k}{k}$$

$$= \lim_{\substack{h \to o \\ k \to o}} \frac{f_1(t+k)-f_1(t)}{k} \cdot \frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}$$

क्योंकि $k=f_2(x+h)-f_2(x)$.

$$= \frac{d f_1(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d f_1(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d[f_1\{f_2(n)\}]}{dx} = \frac{df_1(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

फलनों के फलन का अवकल गुणांक निकालने को इस नियम का विस्तार हो सकता है। यदि y, u का फलन, है; u, v का फलन है; v, x का फलन है, तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

## 3.10. $a^x$ का अवकल गुणांक

माना कि

$f(x) = a^x$

$= e^{x \log a}$

मान $x, \log a = t$

$f(x) = e^t$

इसलिए

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{de^t}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= e^t \cdot \frac{d((\log a.\, x)}{dx}$$

$$= \log a \,.\, e^t$$

$$= \log a \,.\, e^{x \log a}$$

$$= \log a.\, a^x.$$

अतः

$$\frac{d}{dx} a^x = \log_e a.\, a^x.$$

## 3.11. उदाहरणमाला 7

1. $(ax+b)^2$ का अवकल गुणांक निकालो

मान $ax+b=t$

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^2=\frac{dt^2}{dx}$$

$$=\frac{dt^2}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{dt^2}{dt}\times\frac{d(ax+b)}{dx}$$

$$=2t\,.\,a$$

$$=2a(ax+b).$$

2. $e^{\sqrt{\cos x}}$ को x के सापेक्ष में अवकलन करो।

माना कि $\sqrt{\cos x}=t$ रखो

और $\cos x = u$ रखो

$$\frac{d}{dx}e^{\sqrt{\cos x}}=\frac{de^t}{dx}$$

$$=\frac{de^t}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{de^t}{dt}\cdot\frac{d(\cos x)^{\frac{1}{2}}}{dx}$$

$$=\frac{de^t}{dt}\times\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{de^t}{dt}\times\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d\cos x}{dx}$$

$$=e^t\,.\,\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}(-\sin x)$$

$$=-\tfrac{1}{2}\sin x(\cos x)^{-\frac{1}{2}}\,.\,e^{\sqrt{\cos x}}$$

3. $\frac{d}{dx}\log(\sin x)^{\cos x}$ का मान निकालो।

$$\frac{d}{dx}\log(\sin x)^{\cos x}=\frac{d}{dx}\{\cos x\,.\,\log(\sin x)\}$$

$$= \cos x \ . \ \frac{d}{dx} (\log \sin x) + \log (\sin x) \frac{d}{dx} \cos s$$

$$= \cos x \ . \ \frac{\cos x}{\sin x} + \log (\sin x) \ (-\sin x)$$

$$= \cot x \ . \ \cos x - \sin x . \log (\sin x)$$

टिप्पणी:— कुछ फलनों के फलन का अवकल गुणांक निकालने के वाद यह प्रतिस्थापन करने की आवश्यकता नहीं पड़ती है। विद्यार्थी यह समझ सकता है कि फलनों के फलन का अवकल गुणांक विना प्रतिस्थापन के कैसे निकाला जाता है। प्रतिस्थापन के किया हुआ प्रश्न ऊपर उदाहरणमाला ७ के तीसरे प्रश्न में समझाया गया है।

## प्रश्नावली 8

**अवकल गुणांक निकालो:**

1. $\sin x^n$, $\tan x^n$, $\log x^n$, $e^{x^n}$, $a^{x^n}$.
2. $(e^x)^3$, $\tan^3 x$, $(a^x)^3$, $(\log x)^7$, $(\sin x)^3$
3. $\tan 7x$, $\log 5 x$, $\log ax$, $e^{7x}$, $a^{7x}$.
4. $\log (ax+b)$, $\sin (cx+d)$, $e^{3x+2}$, $e^{6x+\sin x}$
5. $\log \log x$, $\log \sin x$, $\log_e (e^x)$, $\log x^5$.
6. $\sqrt{\sin x}$, $\sqrt{a^x}$, $\sqrt{\cot x}$, $(\operatorname{cosec} x)^{3/2}$, $(\log x)^{3/2}$
7. $\frac{1}{\tan x}$, $\frac{1}{\log x}$, $\frac{1}{x^n+a^n}$, $\frac{1}{\sqrt{x+a}}$, $\frac{1}{a^x}$
8. $e^{-x^n}$, $(\sec x)^{-1}$, $(\sin x)^{-5}$, $(\log_a x)^{-2}$
9. (i) $e^{\sqrt{\sin x}}$ विक्रम 1945.
   (ii) $e^{\sqrt{\cot x}}$ विक्रम 1961
10. (i) $\log_e \{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\}$ [ उ. प्रदेश 1961 ]
    (ii) $\log_e (\sec x + \tan x)$ [ उ. प्रदेश 1961 ]
    [ विकम 1961 ]
11. (i) $\log_e \{ \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \}$ [ उ. प्रदेश 1965 ]

(ii) $\log_e [x + \sqrt{x^2 + a^2})$ [राजस्थान 1957]

12. $\log \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ [राजस्थान 1965]

13. $\dfrac{1 - x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$ [विक्रम 1965]

14. (i) $e^{ax} \cdot \cos bx$ (ii) $\cos \sqrt{x} \cdot \log \sin x$

(iii) $\cos x^4 . \cos x^4$ (iv) $e^{\sin x} . \sin e^x$.

(v) $(x+a)^m . (x+b)^n$ (vi) $(x+a)^p (x^m+b)^q$

15. $\dfrac{\cot x^3}{ax+b}$, $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, [राजस्थान 1954, 59]

$\dfrac{\log \cos x}{\tan (\log x)}$, $\dfrac{e^{\sin x}}{\sin x^n}$, $\dfrac{\tan x^3}{ax^2+b}$

16. $\dfrac{e^{\sin x} \sec x}{\sin x^n}$, $\dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sin \sqrt{x}}$

17. $\log (\sin x)^{\cos x}$, $\log_e (e^x)^{\tan x}$, $\log (ax+b)^{\cot x}$

18. $4 \sin x^2 + \log (5 \sin x + 6)$

19. $\dfrac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}$, 20. $\log_e \left( x + \dfrac{1}{x} \right)$ [विक्रम 1961]

21. $\sin^n (nx^n)$; $\{\log (\sin^n x)\}^n$, $\tan^n (\log \cot x)$

22. $f(e^x)$, $f(\sin x)$, $\sqrt{f(x)}$, $[f(a + x)]^n$
$f(ax^n + b)$, $f(\tan x)$.

23. $\log [ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n]$.

## 3.12. प्रतिलोम फलनों का अवकलन
**[ Differentiation of Inverse functions ]**

### $\sin^{-1} x$ का अवकलन

माना कि

$$\sin^{-1} x = y$$

अतः $\quad x = \sin y$

दोनों पक्षों की राशियों को x के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

### 3.13. $\cos^{-1}x$ का अवकल गुणांक

माना कि

$$\cos^{-1}x = y$$

$$x = \cos y$$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$1 = \frac{d}{dx} \cos y$$

$$1 = -\sin y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 \cos^2 y}}$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

### 3.14. $\tan^{-1}x$ का अवकल गुणांक

माना कि

$$y = \tan^{-1}x$$

या $x = \tan y$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$\frac{d(\tan^{-x})}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

इसी तरह से

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

## 3.15. $\sec^{-1}x$ का अवकल गुणांक

माना कि

$$y = \sec^{-1}x$$

$$x = \sec y$$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$1 = \sec y \tan y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

$$= \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

इसी तरह से करने पर

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

## 3.16. लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic differentiation)

यदि फलन (i) $y^x$ के तरह का हो (ii) $u^v$ के तरह का हो, जबकी u और v दोनों ही x के फलन हों या (iii) फलन कई फलनों का गुणनफल य

भागफल हो, तो फलन का लघुगणक लेने के वाद अवकलन करते हैं । अवकलन की इस रीति को 'लघुगणकीय अवकलन' कहते हैं ।

### 3.17. उदाहरण

1. $(1+x)^{\log(1+x)}$ को अवकलन करो ।

माना कि

$$y = (1+x)^{\log(1+x)}$$

दो पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = \log\left\{(1+x)^{\log(1+x)}\right\}$$
$$= \log(1+x)\log(1+x)$$

दोनों पक्षों को अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log(1+x)\frac{1}{1+x} + \log(1+x).\frac{1}{1+x}$$
$$\frac{dy}{dx} = y\ 2\ \frac{\log(1+x)}{1+x}$$
$$= 2\ \frac{\log(1+x)}{1+x}\ .\ (1+x)^{\log(1+x)}$$

2. $(\tan x)^x + x^x$ को x के सापेक्ष में अवकलन करो ।

माना कि

$$y = (\tan x)^x + x^n \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$
$$(\tan x)^x = u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$
और $$x^n = v \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

समीकरण (ii) और (iii) के दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log u = x \log \tan x$$
$$\frac{1}{4}\frac{du}{dx} = x.\ \frac{\sec^2 x}{\tan x} + \log \tan x.\ 1$$

$$\frac{du}{dx} = \left[\frac{x}{\sin x \cos x} + \log \tan x\right] (\tan x)^n \text{—iv}$$

$\log v = x \log x$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x\frac{1}{x} + \log x.1$$

$$\frac{dv}{dx} = (1+\log x)\, v$$

$$\frac{dv}{dx} = (1+\log x)\, x^n \qquad \text{v}$$

समीकरण (i) के दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x)\log x + \frac{dx^n}{dx}$$

$$= \left[\frac{x}{\sin x.\cos x} + \log \tan x\right](\tan x)^x$$

$$+(1+\log x)\, x^n.$$

समीकरन ( ̇v) और (v) के उपयोग से ।

## प्रश्नावली 9

### अवकल गुणांक निकालो:

1. $\log(\sec^{-1} x^4)$ , $\log_e x^{ax}$
2. $\cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)$ , $\tan^{-1}(\sqrt{x})$ , $\sec^{-1}(e^x)$
3. $\sec^{-1}(\tan x)$, $\log(\tan^{-1}x)$, $\operatorname{cosec}^{-1}(2x+1)$,

   $\tan^{-1} e^{2x+1}$ $\sqrt{(\log \sin^{-1}x)}$, $e^{\sin^{-1}(\log x)}$
4. $\cos^{-1}\left\{\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\right\}$, $\tan^{-1}\frac{x}{1+x^2}$, $\cot(\cos^{-1}x)$

   $\tan^{-1}(\sin e^x)$
5. $x^n$, $x^{\sin x}$, $x^{\cot bx}$, $x5n^3$, $x^{\cos ax}$
6. $(\sin x)^x$, $(\tan x)^{\log x}$, $(\sin^{-1}x)^{\log x}$, $_ex^x$
7. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + x^{1+\frac{1}{x}}$, $(\cot x)^{\sin x} + (\tan x)^{\cos x}$

$(\tan x)^{\log x} + x^{x}$

8. यदि $y=(\sin x)^{x}+x^{\log x}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ निकालो

9. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ निकालो ।

10. $x^{x^{x}}$ का अवकल गुणांक निकालो ।

11. $(x-1)^2 (x+2)^3 (x+4) \log x$ का अवकल गुणांक निकालो ।

12. $y=\tan x\, a^{x}. \sin x^{-1}$ का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो

13. $y=\frac{2^{x} \cot x}{\sqrt{x}}$ का $\frac{dy}{dx}$ निकालो

14. $y=\frac{\sqrt{(1-2x)}. \sin x . \tan x}{\sin 5x. a^{x}}$ का $\frac{dy}{dx}$ निकालो

15. $y=\frac{(a-x)(b-x)(c-x)}{e^{x} \sin x. \cos x}$ का अवकलन गुणांक निकालो ।

## 3.18. अस्पष्ट फलनों का अवकल गुणांक:

अस्पष्ट फलनां की परिभाषा अध्याय एक में पढ़ चुके हैं । यदि y एक अस्पप्ट फलन है तो इनके अवकल गुणांक निकालने के लिए फलन के प्रत्येक पद का अवकलन करते हैं । उसके वाद समीकरण को हल करके अस्पष्ट फलन y का अवकलन गुणांक निकाल लेते हैं ।

## 3.19. उदाहरण:

1. यदि $\log x y=x^2+y^2$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ निकालो ।

$$\log x y=x^2+y^2$$

$$\log x+\log y=x^2+y^2$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y}-2y\right)=2x-\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-2y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x^2-1)\,y}{(1-2y^2)\,x}$$

2. यदि $x^y=e^{xy}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

दोनों पक्षों का लघुगणांक लेने पर

$$\log_e x^y=\log_e e^{x-y}$$

$$y\log x=(x-y) \qquad \text{(i)}$$

$$(1+\log x)\,y=x$$

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{(\log x+1)} \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (i) के दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$$y\,\frac{d\,(\log x)}{dx}+\log x\frac{dy}{dx}=1-\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\,(1+\log x)=1-\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)}{x\,(1+\log x)}$$

समीकरण (i) का उपयोग करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\log x}{x\,(1+\log x)}$$

अब समीकरण (ii) का उपयोग करने से

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

## 3.20. प्राचलिक समीकरण (Parameteric Equation)

यदि चर x और y एक तीसरे चर t द्वारा दर्शाये जाते हैं तो चर t को प्राचल कहते हैं और इन समीकरणों को प्राचलिक समीकरण कहते हैं ।

यदि $y=f_1(t)$ और $x=f_2(t)$ है

तो $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

## 3.21. उदाहरणमाला 10

1. यदि $x=a\cos^3 t$ और $y=a\sin^3 t$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx}=-\tan t$$

दोनों समीकरणों के दोनों पक्षों को x के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t$$

और $$\frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$$

अतः $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}$$

$$=-\tan t.$$

2. यदि $x=\frac{3at}{1+t^3}$ और $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)}$$

दोनों समीकरणों को t के सापेक्ष में क्रमशः अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(1+t^3)\frac{d(3at)}{dt}-3at\frac{d}{dt}(1+t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{3a(1+t^3) - 3at.\ 3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{3a + 3at^3 - 9at^3}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t3)^2} \qquad \text{(i)}$$

और

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t^3)\frac{d}{dt}(3at^2) - 3at^2\frac{d}{dt}(1+t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{(1+t^3)\ 6at - 3at^2.\ 3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{3at\ [2t^3+2-3t^3]}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{3at\ [2-t^3]}{[1+t^3]^2}$$

अत:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{3ta\ [2-t^3]\ /\ (1+t^3)^2}{3a\ [1-2t^3]\ /\ (1+t^3)^2}$$

$$= \frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)}$$

## प्रश्नावली 10

निम्न लिखित का अवकल गुणांक निकालो ।

1. $x^5+y^5+5xy-c=o.$
2. $x^{2/5} + 3y^{1/5}x^{1/5} + y^{2/5} = a^{2/5}.$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a.$
4. $x \tan y + \log \sin y = \log a.$
5. $x^y + y^x = 25.$
6. $x^y.\ y^x = 1\cdot$

7. $e^x . \log_e y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}y$.

8. $(\sin x)^{\cos y} + (\cos x)^{\sin y} = k$.

9. $(\sin x)^{\cos y} - (\cos x)^{\sin y} = y$.

नीचे लिखे हुए समीकरणों से $\frac{dy}{dx}$ निकालो ।

10. $x = (t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

11. $x = \sin t^3 + \cos t^3,\ y = \sin t + 2\cos^{-1}t$.

12. $x = a\left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right),\ y = a \sin t$.

13. $x = \log t + \sin t,\ y = e^t + \cos t$.

14. यदि $x = (1+y)^{\frac{1}{2}} + y(1-x)^{\frac{1}{2}} = o$, तो सिद्ध करो कि $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^{-2}}$

15. यदि $y = x^y$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1 - y \log x)}$$

16 यदि $\sin y = x \sin(a + y)$ हो तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

## 3.22. त्रिकोणमितीय सूत्रों का अवकलन में उपयोग
**[ Use of Trigonometrical Formulae in Differentiation ]**

कभी कभी त्रिकोणमितीय सूत्रों का उपयोग करने से फलनों का अवकलन आसानी से निकाल लेते हैं । इसलिए कुछ मुख्य सूत्रों का संग्रह यहाँ दिया जा रहा है ।

1. $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

2. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

3. $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

4. $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

5. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

6. $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

7. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\sin\theta$

8. $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$

9. $\sin^{-1}(\sin\theta) = \sin(\sin^{-1}\theta) = \theta$

10. $\cos^{-1}(\cos\theta) = \cos(\cos^{-1}\theta) = \theta$

11. $\tan^{-1}(\tan\theta) = \tan(\tan^{-1}\theta) = \theta$

12. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} \pm \theta\right) = \dfrac{1 \pm \tan\theta}{1 \mp \tan\theta}$

13. $\tan^{-1}\alpha + \tan^{-1}\beta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta}\right)$

## 3.23. उदाहरणमाला 11

1. $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ का अवकल गुणांक निकालो ।

फलन में $x = \tan\theta$ रखने पर,

$$\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$$
$$= \tan^{-1}(\tan 2\theta)$$
$$= 2\theta$$

इसलिए

$$\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right\} = \frac{d(2\theta)}{dx}$$
$$= 2\frac{d\theta}{dx}$$
$$= 2\frac{d(\tan x^{-1})}{dx}$$
$$= \frac{2}{(1+x^2)}$$

2. $\sin^{-1}(3x - 4x^3)$ का अवकल गुणांक निकालो।

$x = \sin\theta$ रखने पर

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}\theta - 4\sin^3\theta)$$

$$= \frac{d}{dx}\sin^{-1}(\sin 3\theta)$$

$$\frac{d(3\theta)}{dx}$$

$$= 3\frac{d\theta}{dx}$$

$$= 3\frac{d}{dx}\sin^{-1}x$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. $\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$ को अवकलित करिये।

अनुच्छेद 3.22 के सूत्र 12 का उपयोग करने पर

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - x$$

इसलिए

$$\left(\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)\right.$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$= -1.$$

## प्रश्नावली 11

नीचे लिखे हुये फलनों को अवकलित करो:

1. $\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, $\cos^{-1}(2x^2 - 1)$

2. $\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$, $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$, $\tan^{-1}\frac{4x}{4-x^2}$

$\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

3. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a(a^2-3x^2)}\right)$, $\tan^{-1}\left(\frac{3ax}{a^2-2x^2}\right)$,

$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$, $\tan^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

4. $\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

5. $\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$

6. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)$ (राजस्थान 1959)

7. $\tan^{-1}\frac{\sin x}{1+\cos x}$

8. $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$ (राजस्थान 1960)

9. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right)$ (पूना 1961)

## 3.24. परिभाषा द्वारा अवकलन गुणांक
## [Differential Coefficient by Definition]

अवकल गुणांक की परिभाषा हम दूसरे अध्याय में पढ़ चुके हैं । इस अध्याय में कुछ खास खास फलनों के अवकल गुणांक भी निकाल चुके हैं । अत इस खंड में फलनों का अवकल गुणांक परिभाषा द्वारा ही निकालेंगे ।

## 3.25. उदाहरणमाला 12

1. $x^{\frac{3}{10}}$ का अवकल गुणांक परिभाषा द्वारा निकालो

माना कि

$$f(x)=x^{\frac{3}{10}}$$

$$f(x+h)^{\frac{3}{10}}$$

इसलिए परिभाषा से

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{10}}\right)=\lim_{h\to o}\frac{(x+h)^{\frac{3}{10}}-x^{\frac{3}{10}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{x^{\frac{3}{10}}\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{3}{10}}-1\right\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{x^{\frac{3}{10}}\left[1+\frac{3}{10}\frac{h}{x}+\frac{3}{10}\left(\frac{3}{10}-1\right)\frac{h^2}{\underline{|2}\,.\,x^2}+\ldots-1\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}x^{\frac{3}{10}}\left[\frac{3}{10}\frac{1}{x}+\frac{3}{10}\left(\frac{-7}{10}\right)\frac{1}{\underline{|2}}\frac{h}{x^2}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{3}{10}x^{\frac{3}{10}}.\frac{1}{x}$$

$$=\frac{3}{10}x^{-\frac{7}{10}}$$

2. परिभाषा द्वारा $x^{-8}$ का अवकल गुणांक निकालो।

माना कि

$$f(x)=x^{-8}$$
$$f(x+h)=(x+h)^{-8}$$

परिभाषा द्वारा

$$\frac{d\,x^{-8}}{d\,x}=\lim_{h\to o}\frac{(x+h)^{-8}-x^{-8}}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{x^{-8}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{-8}-x^{-8}}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{x^{-8}\left[1-\frac{8h}{x}+\frac{8\,.\,9}{\underline{|2}}\frac{h^2}{x^2}+\ldots\ldots-1\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} x^{-8} \left[ -\frac{8}{x} + \frac{8\,.\,9}{\lfloor 2} \frac{h}{x^2} + \ldots\ldots\ldots \right]$$

$$= -x^{-8} \,.\, \frac{8}{x}$$

$$= -8\,x^{-9}.$$

3. tan x का अवकल गुणांक निकालो ।

माना $f(x) = \tan x$

$$f(x+h) = \tan(x+h)$$

परिभाषा से

$$\frac{d}{dx} \tan x = \lim_{h \to o} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{\sin(x+h)\,.\,\cos x - \sin x\,.\,\cos(x+h)}{h\,.\,\cos x\,.\,\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{\sin h}{h\,.\,\cos(x+h)\,.\,\cos x}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

4. $\sin^{-1}x$ का परिभाषा द्वारा अवकल गुणांक निकालो ।

माना कि

$$y = \sin^{-1}x$$

$$y+k = \sin^{-1}(x+h)$$

यहाँ जैसे ही $h \to o$, k भी शून्य को उपगमन करता है ।

$$x = \sin y$$

$$x+h = \sin(y+k)$$

इसलिए

$$h = \sin(y+k) - \sin y$$

$$1 = \frac{\sin(y+k) - \sin y}{h}$$

$$1 = \frac{\sin(y+k) - \sin y}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$1 = \frac{\sin(y+k) - \sin y}{k} \cdot \frac{\sin^{-1}(x+h) - \sin^{-1}x}{h}$$

यदि $h \to o$ और $k \to o$, तो

$$1 = \frac{d \sin y}{d y} \cdot \frac{d (\sin^{-1}x)}{d x}$$

$$\frac{d (\sin^{-1}x)}{d x} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\frac{d (\sin^{-1}x)}{d x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

5. परिभाषा द्वारा $5^x$ का अवकल गुणांक निकालो ।

माना कि

$$f(x) = 5^x$$

$$f(x+h) = 5^{x+h}.$$

$$\frac{d\, 5^x}{d x} = \lim_{h \to o} \frac{5^{x+h} - 5^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{5^x [5^h - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{5^x [1 + h \log_e 5 + \frac{1}{\underline{|2}} (h \log 5)^2 \ldots - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} 5^x [\log_e 5 + \tfrac{1}{2} h (\log_e 5)^x + \ldots\ldots]$$

$$= 5^x . (\log_e 5)$$

6. $\cos x^2$ को परिभाषा द्वारा अवकलित करो ।

माना कि $f(x) = \cos (x)^2$

$$f(x+h) = \cos(x+h)^2$$

$$\frac{d\cos x^2}{dx} = \lim_{h\to o} \frac{\cos(x+h)^2 - \cos x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to o} \frac{2\sin\left[\frac{(x+h)^2+x^2}{2}\right]\sin\left[\frac{x^2-(x+h)^2}{2}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to o} \frac{2\sin\left[-\frac{2x+h}{2}\right].\sin\left[\frac{2x^2+2hx+h^2}{2}\right]}{-\frac{2x+h}{2}}$$

$$\times \frac{\left[-\frac{2hx+h^2}{2}\right]}{h}$$

$$= -2\sin\left(x^2+hx+\frac{h^2}{2}\right).\frac{\sin\frac{2x+h}{2}}{\frac{2x+h}{2}}.\frac{2x+h}{2}$$

$$= -2\sin x^2 . x$$

$$= -2x\sin x^2$$

7. $\sin^2 x$ का अवकल गुणांक निकालो ।

माना कि $f(x) = \sin^2 x$

$$f(x+h) = \sin^2(x+h)$$

इसलिए

$$\frac{d\sin^2 x}{dx} = \lim_{h\to o} \frac{\sin^2(x+h) - \sin^2 x}{h}$$

$$= \lim_{h\to o} \frac{\sin(x+h+x).\sin(x+h-x)}{h}$$

क्योंकि

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$= \lim_{h\to o} \frac{\sin(2x+h).\sin h}{h}$$

$$= \sin 2x.$$

8. $\cos(\log x)$ का अवकल गुणांक निकालो ।

माना कि $f(x) = \cos(\log x)$

$$f(x+h) = \cos\{\log(x+h)\}$$

अत:

$$\frac{d\cos(\log x)}{dx} = \lim_{h \to o} \frac{\cos\{\log(x+h)\} - \cos(\log x)}{h}$$

माना कि $\log x = t$,

इसलिए $\log(x+h) = t+k$

$$\therefore \frac{d\cos(\log x)}{dx} = \lim_{\substack{h \to o \\ k \to o}} \frac{\cos(t+k) - \cos t}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to o \\ k \to o}} \frac{\cos(t+k) - \cos t}{k} \times \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to o \\ k \to o}} \frac{-2\sin\left(t+\frac{k}{2}\right)\sin\frac{k}{2}}{k} \cdot \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= -\sin t \cdot \lim_{h \to o} \frac{\left(\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} \cdots\right)}{h}$$

$$= -\sin t \cdot \lim_{h \to o} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{h}{x^2} + \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \sin t$$

$$= -\frac{1}{x} \sin(\log x).$$

## प्रश्नावली 12

निम्न लिखित फलनों को परिभाषा द्वारा अवकलन करो:

1. $x^7$, $a x^5$, $10 x^8$

2. $x^{-\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{-1}$, $x^{\frac{3}{8}}$

3. $x^2+a\,x+b,\ x^3+3b\,x^2+3\,c\,x+d$

4. $x+\dfrac{1}{x}\ ,\ x^2+\dfrac{1}{x^2}$

5. $e^{ax}\ ,\ e^{5x}\ ,\ e^{-7x}\ ,\ e^{-\frac{3}{4}x}$

6. $a^x\ ,\ a^{8x}\ ,\ {}_b(ax+b)$

7. $\log_a x$ , see x , cot x , cosec x

8. $\cos^{-1}x\ ,\ \sec^{-1}x\ ,\ \tan^{-1}x\ ,\ \cot^{-1}x$

9. $\cos^2 x\ ,\ \sin^2 x^2\ ,\ \sin^2 x^3$

10. $(x-2)\ (x+3)\ ,\ (x^2+2\,x+3)\ (x-2)$

11. $\dfrac{x^2+3}{x^2+5}\ ,\ \dfrac{x+1}{x+a}$

12. $(a\,x+b\,x)^n,\ \sqrt{a^2-x^2}\ ,\ \sqrt{a^2\,x^2+b^2}$

13. $\log\sec x\ ,\ \log\tan x\ ,\ \cos^2(\log x)$

14. $x^2\sin x\ ,\ a\,x\tan x$

15. $\log\sin^{-1}x\ ,\ \cos(\log x)$

## 3.26. अनन्त श्रेणियों का अवकलन

**[ Differentiation of Infinite series ]**

अनन्त श्रेणियों के अवकलन के लिए कोई विशेष रीति नहीं है । इन्हे देख कर सुविधानुसार करते हैं ।

## उदाहरणमाला 13.

1. यदि $y=e^{x+e^{x+e^{x+e^{x+\cdots}}}}$

तो सिद्ध करो

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1-y}$$

दिया है कि

$$y=e^{x+e^{x+e^{x+e^{x+\cdots}}}}$$

$$= e^{x + \left[ e^{x + e^{x + e^{x + \cdots}}} \right]}$$

कोष्ठक के अन्दर का व्यंजक y है अत:

$$y = e^{x + y}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = x + y$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - 1\right) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 - y}$$

## प्रश्नावली 13

1. यदि $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}\cdots\cdots}}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2 - y\log x}$$

2. यदि $y = x^{x^{x\cdots\cdot}}$ तो सिद्ध करो कि

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log x}$$

3. यदि $y = (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)\cdots\cdots}}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cot x}{1 - y\log(\sin x)}$$

4. यदि

$$y = \sqrt{[\sin x + \sqrt{\{(\sin x + \sqrt{(\sin x ..)}\}}]}$$

तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos y}{2y-1}$$

3.27. 1. $ax^3$ को $x^3$ के संदर्भ में अवकलन करो।

माना कि $x^3 = t$

$$\frac{d\,ax^3}{dx^3} = a\frac{dt}{dt} = a.$$

2. फलन $x^{\sin^{-1}x}$ को $\sin^{-1}x$ के संदर्भ में अवकलन करो।

माना कि $\sin^{-1}x = t$

अत: $x = \sin t$

$$\frac{dx^{\sin^{-1}x}}{d\sin^{-1}x} = \frac{d(\sin t)^t}{dt}$$

माना कि $y = (\sin t)^t$

$\log y = t \log \sin t$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = t\frac{\cos t}{\sin t} + \log \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = y\,[t\cot t + \log \sin t]$$

अत:

$$\frac{d\,x^{\sin^{-1}x}}{d\sin^{-1}x} = x^{\sin^{-1}}\left[\sin^{-1}x \,.\, \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \log \sin^{-1}x\right]$$

## प्रश्नावली 14

1. $5x^{10}$ को $x^2$ के संदर्भ में अवकलन करो
2. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ को $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ के संदर्भ में अवकलन करो
3. $a^{\sin^{-1}x}$ को $\sin^{-1}x$ के संदर्भ में अवकलन करो

4. $e^{\sqrt{t}}$ को $\sqrt{t}$ के संदर्भ में अवकलन करो

5. $\sin^2 x$ को $(\log x)^2$ के संदर्भ में अवकलन करो

6. $\log_{10}{}^x$ को $x^2$ के संदर्भ में अवकलन करो

7. $\tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ को $\tan^{-1}x$ के संदर्भ में अवकलन करो

## विविध प्रश्नावली 15

नीचे लिखे हुए फलनों का अवकल गुणांक निकालो

1. $(bx+)^{10}$

2. $(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}$

3. $\dfrac{2+x^2}{1+x}$

4. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

5. $\dfrac{x}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

6. $\dfrac{ax^3+bx^2+e}{\sqrt{x}}$

7. $\dfrac{e^{x^2}.\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}$

8. $\log(\tan^{-1}x)$

9. $\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{b+x}}$

10. $\dfrac{\cos x}{1+\tan x}$

11. $\log\left\{(x-1)(x^2+1)^{-\frac{1}{4}}\right\}$,

12. $e^{\sqrt{x+2}} - e^{\sqrt{x+2}}$

13. $\sin(e^x).\log x$

14. $2x^3 \tan^{-1}x + \log(1+x^2)$ [ विक्रम 1962 ]

15. $\log \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$ [पटना 1937]

16. $\log\{\sqrt{1+\log x}-\sin x\}$ [ बम्बई 1936 ]

17. $\log\ \log_e x^2$ [ विक्रम 1963 ]

18. $\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$ [ राजस्थान 1959 ]

19. (i) $10^{\log \sin x}$ (ii) $7^{x^2+2x}$

20. $\tan^{-1}(e^x)\log\cot x.$ 21. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

22, $\cos\left(a\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)$ 23. $\sin^{-1}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$

24. (i) $a\cot^{-1}\{m\tan^{-1}(bx)\}$

(ii) $b\tan^{-1}\left\{\frac{x}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\}$

25. $e^{ax}\cos(b\tan^{-1}x)$ 26. $e^{ax}\sin bx$

27. $\cot^3x.(e^{3x}.x^x)$ 28. $\sin^{-1}({}_c\text{ten}^{-1}x)$

29. $(\tan x)^{\log x}+(\cot x)^{\sin x}$

30. $x^x+x^{1/x}$ [राजस्थान 1959]

31. $(1+x)^x+(x)^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

32. $x.\log x.\log\log x.$

33. $\sin x.\sin 2x.\sin 3x.\sin 4x.$

34. $\frac{\sin x.\sin 2x}{\sin 3x}$

35. $(x)^{(\log x)^{\log\log x}}$

36. $x^m y^n=(x+y)^{m+n}$, तो $\frac{dy}{dx}$ निकालो ।

37. यदि $y=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$, हो, तो सिद्ध करो, कि

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+y=o$$

38. यदि $y=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ हो, तो सिद्ध करो, कि

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}=x\,y+1$$

39. यदि $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a\,(x-y)$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

40. $\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}$ को $\tan^{-1}x$ के संदर्भ में अवकल गुणांक निकालो !

# अध्याय: 4

## अवकल गणित की साधारण उपयोगिताएँ
## (Simple application's of Differential Calculus)

4.1. प्रथम अध्याय में हम यह पढ़ चुके हैं कि अवकल गणित की सहायता से हम उच्चतर गणित, विज्ञान, यांत्रिकी आदि के प्रश्नों को हल कर सकते हैं। इस अध्याय में अवकल गणित की उपयोगितायें देखेंगे।

### 4.2. अवकलज (Derivative) माप की दर

यदि x और y दो चर हैं और $y=f(x)$

समीकरण द्वारा सम्बन्धित हैं। यदि $\delta x$ और $\delta y$ के बढ़ने की मात्रा की दर सूक्ष्म हो, तो

$\frac{\delta y}{\delta x}$, y का x के सापेक्ष में परिवर्तन की दर का औसत कहलाता है।

यदि $\delta x \to o$, तो

x के संदर्भ में y के परिवर्तन की दर

$$= \lim_{\delta x \to o} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$= \frac{dy}{dx} \text{ होगी ।}$$

अत:

$\frac{dy}{dx}$ = x के सापेक्ष में y के परिवर्तन की दर।

**4.3. वेग (Velocity):**—स्थानान्तर की दर को वेग कहते हैं ।

माना कि कोई पिण्ड एक विन्दु क से चलकर ख पर t सेकिण्ड में पहुँचता है । क ख की दूरी s है । $t+h$ दूरी $s+k$ से० में चलता है, तो

$\frac{k}{h}$ पिण्ड की औसत वेग है जबकि पिण्ड h समय चलता है । यह औसत वेग प्रारम्भिक वेग से बड़ा होना चाहिए क्योंकि वेग में वृद्धि है । यदि समय h बहुत छोटा ो तो औसत वेग शून्य की ओर उपगमन करता है, परन्तु $\frac{k}{h}$, जब $h\to o$ $k\to o$, $\%$ का रूप है । अतः अवकल गणित की सहायता से हम वेग की परिभाषा देते हैं ।

यदि $S=f(t)$ हो तो

$$S+k=f(t+k)$$

$$\lim_{h\to o}\frac{k}{h}=\lim_{h\to o}\frac{S+K-S}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{f(t+k)-f(t)}{h}$$

$$=\frac{d\,f(t)}{dt}$$

$$=\frac{ds}{dt}$$

अतः वेग $=\frac{ds}{dt}$

**4.4. त्वरण या वेग-वृद्धि (Acceleration):—**

वेग के परिवर्तन की दर को, चलते हुए पिण्ड की वेग-वृद्धि या त्वरण कहते हैं ।

अतः त्वरण $=\frac{dv}{dt}$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$\text{त्वरण} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\ \frac{ds}{dt}$$

$$= v \cdot \frac{dv}{ds}$$

## 4.5. सन्निकट हल (Approximate Calculation)

अनुच्छेद 4.1 में हम पढ़ चुके हैं कि

$$\lim_{\delta \to o} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

यदि $\delta x$ पर्याप्त अधिक छोटा हो तो

$$\delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \delta x.$$

यह $y$ में लघु परिवर्तन देता है, तथा इससे $y$ के मान में प्रतिशत परिवर्तन भी निकाल सकते हैं ।

## 4.6. उदाहरणमाला 13

1. समीकरण $w=5h^2+2h$ से किसी व्यक्ति का वजन उसकी ऊँचाई द्वारा ज्ञात किया जाता हैं, जबकि ऊँचाई, h वजन w है । यदि व्यक्ति की ऊँचाई 5 फी. 6 इं. हो और ऊँचाई के बढ़ने की दर 1 इ. प्रति वर्ष हो तो वजन के बढ़ने की दर ज्ञात करो ।

दिया है

$$\delta h = 1 \text{ इंच} = \tfrac{1}{12} \text{ फुट}$$

समीकरण $w=5h^2+2h$ को h के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$\delta w = (10h+2) \cdot \delta h$$

$\delta h = \frac{1}{12}$, $h = \frac{11}{2}$ रखने पर

$$\delta w = \left(10 \times \frac{11}{2} + 2\right) \cdot \frac{1}{12} = \frac{19}{4}$$

$$= 4\tfrac{3}{4} \text{ पौंड}$$

2. एक चर अर्ध व्यास वाला गुब्बारा हमेशा गोलाकार रहता है। यदि अर्ध व्यास 10 इं. हो तो अर्ध व्यास के संदर्भ में गुब्बारे के आयतन की गति की दर निकालो।

माना कि अर्ध व्यास x है।

आयतन $v = \frac{4}{3}\pi x^3$ है।

अतः $\frac{\delta v}{\delta x} = 4\pi x^2$

$= 400\pi$

3. यदि कोई पिण्ड वक्र $x = a\,t$, $y = b \sin t$ पर चल रहा है, तो सिद्ध करो कि

(i) वेग का x— घटन अचर है।

(ii) किसी समय उस विन्दु पर त्वरण, पिण्ड की दूरी के अनुसार बदलता है।

$x = a\,t$ को t के संदर्भ में अवकलन करने पर, वेग का x— घटन

जहां कि $\frac{dx}{dt} = a$ है, जो कि एक अचर है।

$y = b \sin t$ को t के संदर्भ में अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dt} = b \cos t$$

इसलिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b \cos t}{a} = \frac{b}{a} \cos t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a} \sin t \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{-b}{a} \sin t .\ a$$

$$= -b \sin t$$

$$= -b\,y$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$, y के समानुपात में है।

## प्रश्नावली 16

1. सिद्ध करो कि अर्ध गोलाकार गुब्बारे के आयतन में वृद्धि की दर अर्ध व्यास के सापेक्ष से $4\pi r^2$ है।

2. सिद्ध करो कि गोलाकार गुब्बारे के क्षेत्रफल में वृद्धि की दर अर्ध व्यास के संदर्भ से $8\pi r$ है।

3. एक चर अर्धव्यास वाला गुब्बारा हमेशा गोलाकार रहता है। यदि अर्ध व्यास 7 इ. हो तो अर्ध व्यास के संदर्भ से गुब्बारे के आयतन की गति की दर निकालो।

4. एक 6 फी. ऊँचा मनुष्य 20 फी. ऊँचे बिजली के खम्बे से $3\frac{1}{2}$ मी. प्रति घन्टे से चलता है। तो परछांई किस गति से बढ़ती है।

5. एक 3 सेन्टी मीटर कोर वाले 2 से. प्रति से. की दर से बदलता है, तो उसका आयतन किस गति से बढ़ेगा।

6. एक प्रकाश लैम्प a मीटर की ऊँचाई पर है। कोई b मीटर ऊँचा पिण्ड क्षैतिज (Horizental) में चल रहा है। यदि पिण्ड लैम्प से चले तो पिण्ड की छाया किस गति से बदलेगी. जब कि पिण्ड c मीटर प्रति से. की दर से चलता है।

7. एक लम्ब वृत्तीय शंकु (Right circular Cone) गुब्बारा, जिसका शीर्ष उर्ध गोलाकार है, तथा व्यास और शंकु की ऊँचाई बराबर है, ऊपर जा रहा है। यदि ऊंचाई १ इकाई हो तो ज्ञात करो कि गुब्बारे का आयतन, पूर्ण ऊंचाई के अनुसार किस गति से बदल रहा है।

8. यदि एक छड़ A B, जो कि 10 फी. लम्बी है, दो लम्बीय अक्ष o x और o y पर अपने सिरे A और B के सहारे चलता है। यदि oA=8 मी. और A 2 फी. प्रति मीटर की दर से चल रहा हो तो ज्ञात करो कि B किस गति से चलता है।

9. यदि x बढ़ता हो, तो सिद्ध करो कि $\dfrac{a \sin x+b \cos x}{c \sin x+d \cos x}$, x के प्रत्येक मान के लिए, या तो बढ़ता है या घटता है। a, b, c, d अचर राशियाँ है।

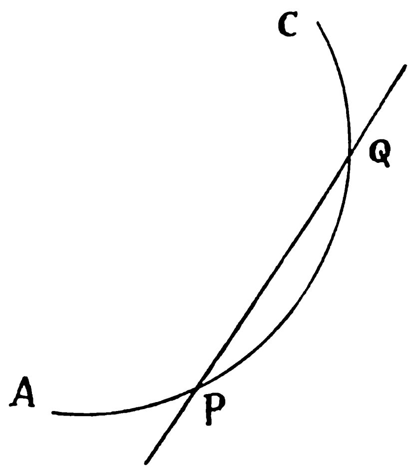
10. दवाव P ग्रौर ग्रायतन v, $P. v^{1\cdot4}=k$ समीकरण द्वारा संवंधित है, k ग्रचर है । यदि दवाव 0·7 प्रतिशत की दर से वढ़ता है तो सिद्ध करो कि ग्रायतन 0·5 प्रतिशत की दर से वढ़ता है ।

11. यदि एक हवाई जहाज 5 मील, t से. में चलता हो, तो उसकी वेग 5 घन्टे में क्या होगी, जव कि $s = 100t + 5t^2$ है ।

# अध्याय: 5

## स्पर्श और अभिलंब रेखायें
## (Tangents & Normals)

मानलो कि किसी वक्र AC को कोई सरल रेखा PQ, विन्दुओं P और Q पर काटती हैं। सरल रेखा PQ, वक्र AC के विन्दु P पर, स्पर्श रेखा होगी यदि P और Q इतने नजदीक आ जायें कि उनकी दूरी नहीं के वरावर हो। अर्थात् जैसे विन्दु Q, बिन्दु P की ओर उप-गमन करे तथा Q, P के ऊपर हो जाय तो सरल रेखा PQ को, विन्दु P पर स्पर्श रेखा कहते हैं।




### 5.2 स्पर्श रेखा का समीकरण:–

माना कि $y=f(x)$ कोई एक वक्र है P और Q कोई दो विन्दु हैं, जिनके निर्देशांक क्रमश: $(x, y)$ और $(x_1+h, y_1+k)$ हैं। माना कि कोई विन्दु R जिसके निर्शेशांक $(x, y)$ हैं, सरल रेखा PQ पर है। अतः PQ रेखा का समीकरण—

$$y-y_1=\frac{y_1+k-y_1}{x_1+h-x_1}(x-x_1)\ldots\ldots..(i)$$

लेकिन P और Q दोनों ही वक्र $y=f(x)$ पर हैं अतः $y_1=f(x_1)$

$$y_1+k=f\ (x_1+h)$$

इस मान को समीकरण (i) पर रखने पर

$$y-y_1=\frac{f\ (x_1+h)-f\ (x_1)}{h}\ (x-x_1)$$

रेखा PQ स्पर्श रेखा होगी ।

यदि विन्दु $Q \rightarrow P$, तो $h \rightarrow o$; अतः

$$y-y_1=\lim_{h\rightarrow o}\frac{f\ (x_1+h)-f\ (x_1)}{h}\ (x-x_1)$$

$$\text{परन्तु} \lim_{h\rightarrow o}\frac{f\ (x_1+h)-f\ (x_1)}{h}=\frac{df\ (x)}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

$$\text{इसलिए}\ y-y_1=\frac{dy}{dx}\ (x-x_1)\ldots\ldots\ldots(ii)$$

यह वक्र AC के विन्दु P $(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा होगी ।

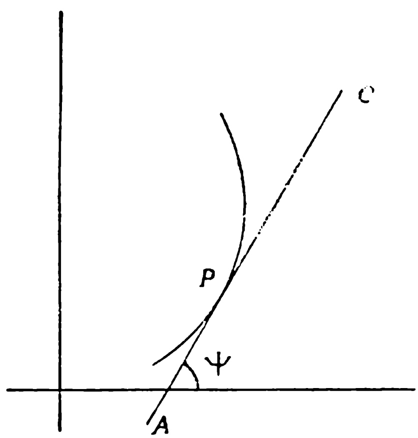
## 5.3 $\frac{dy}{dx}$ का ज्यामितीय अर्थः—

यदि $y = mx + c$ कोई सरल रेखा A B का समीकरण हो, तो हम निर्देशांक ज्यामिति से यह जानते हैं कि–

$$m=\tan \psi$$

यदि इस समीकरण को अनुच्छेद (5.2) के समीकरण (2) से तुलना करें तो

$\frac{dy}{dx}=m$ के आता है ।




अर्थात विन्दु ( x, y ) पर अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$, उस कोण के Tangent के वरावर होता है, जो कि विन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा वनाती है ।

5.4 वक्र में विन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा x अक्ष के समानान्तर होगी ।

यदि $\psi=o$, होगी ।

या $\tan \psi=o$

अर्थात $\dfrac{dy}{dx} = 0$

5.5. वक्र में बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा x— अक्ष पर लम्ब होगी यदि $\psi = 90°$ हो ।

$$\text{या } \tan 90 = \infty$$

$$\text{या } \tan \psi = \frac{dy}{dx} = \infty$$

5.6. (i) निर्देशांक ज्यामिति में हम पढ़ चुके हैं कि यदि $m_1 = m_2$ तो दो रेखायें, जिनके $m_1$ और $m_2$ प्रवणता (Gradient) हैं, समानान्तर होती हैं ।

इसलिये अवकल गणित के अनुसार, दो रेखायें जिनके प्रवणता $m_1$ और $m_2$ हैं, समानान्तर होगी यदि

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 \text{ जब कि}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = m_1 \text{ और } \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = m_2$$

(ii) दो रेखायें एक दूसरे पर लम्ब होती हैं यदि

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$\text{अर्थात् } \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -1$$

(iii) हम निर्देशांक ज्यामिति में पढ़ चुके हैं, कि यदि दो वक्रों के बीच का कोण θ हो, तो

$$\tan \theta = \frac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\text{यदि, } m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \text{ और } m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_2$$

$$\text{तो, } \tan \theta = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \sim \left(\frac{dy}{dx}\right)_2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_2}$$

## उदाहरणमाला 14

1. वक्र $6y = 9 - 3x^2$ के लिए बिन्दु ( 1, 1 ) पर स्पर्श रेखा का समीकरण लिखो ।

वक्र के समीकरण को अवकलन करने पर हमें मिलता है,

$$6\ \frac{dy}{dx} = -6x$$

$$\frac{dy}{dx} = -x$$

विन्दु (1, 1) पर $\frac{dy}{dx} = -1$ है।

इसको इस तरह से भी लिखते हैं कि

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\,1)\text{ पर}} = -1$$

इसलिये विन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण निम्नांकित होगा,

$$y - 1 = \frac{dy}{dx}(x - 1)$$

$$y - 1 = -1\,(x - 1)$$

$$y - 1 = -x + 1$$

$$y + x = 2$$

2. वक्र $\frac{y}{a} = \log\sec\frac{x}{a}$ पर विन्दु $(x_1\ y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण निकालो ।

वक्र $\frac{y}{a} = \log\sec\frac{x}{a}$ को अवकलन करने पर

$$\frac{1}{a}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x.a} \cdot \sec\frac{x}{a} \cdot \tan\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\frac{x}{a}$$

अतः स्पर्श रेखा का $(x_1\ y_1)$ विन्दु पर समीकरण

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \tan\frac{x_1}{a}(x - x_1)$$

3. यदि वक्र $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ की कोई स्पर्श रेखा x और y

अक्षों से क्रमशः p और q का अंतः खण्ड काटती हो तो सिद्ध करो कि

$$\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=1$$

वक्र को x के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}-}\frac{1}{b}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)/\left(\frac{x}{a}\right)}=-\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{y}{x}}$$

विन्दु $(x_1\, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y-y_1=-\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}\,(x-x_1)$$

$$\frac{y}{\sqrt{by_1}}-\sqrt{\frac{y_1}{b}}=-\frac{x}{\sqrt{ax_1}}+\sqrt{\frac{x_1}{a}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{by_1}}+\frac{x}{\sqrt{ax_1}}=\sqrt{\frac{y_1}{b}}+\sqrt{\frac{x_1}{a}}$$

क्योंकि विन्दु $(x_1\, y_1)$ वक्र पर है अतः

$$\sqrt{\frac{y_1}{b}}+\sqrt{\frac{x_1}{a}}=1$$

इसलिये $\dfrac{y}{\sqrt{by_1}}+\dfrac{x}{\sqrt{ax_1}}=1$

यह रेखा x–अक्ष को $y=0$ पर मिलाती है अतः

$\dfrac{x}{\sqrt{ax_1}}=1 \qquad x=\sqrt{a\,x_1}\;=p$ दिया है

अतः $x_1=p^2/a$

इसी तरह $o+\dfrac{y}{\sqrt{by_1}}=1 \qquad y=\sqrt{by_1}=q$

$y_1=\dfrac{q^2}{b}$, $x_1\, y_1$ को वक्र में रखने पर

$$\sqrt{\frac{p^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{q^2}{b^2}}=1 \text{ or } \frac{p}{a}+\frac{q}{b}=1$$

4. सिद्ध करो कि n का कोई भी मान हो वक्र $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ सरल रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ को विन्दु (a b) पर स्पर्श करता है।

वक्र $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ को x के सापेक्ष में अवकलन करने पर,

$$\frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\frac{n}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}\frac{dy}{dx}=o$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}{a\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}}$$

इसलिए $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}$ पर $=-\frac{b}{a}$..........(i)

सरल रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, का प्रवणता $\left(-\frac{b}{a}\right)$ है।........(ii)

(i) और (ii) से

वक्र का (a, b) पर $\frac{dy}{dx}=$ सरल रेखा (ii) का प्रवणता।

अतः सरल रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, वक्र $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ के बिन्दु (a, b) पर स्पर्श करता है।

5. वह विन्दु निकालो जहां वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ की स्पर्श रेखा x — अक्ष के समान्तर हो।

वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ को x के संदर्भ में अवकलन करने पर

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2x}{2y}=\frac{1-x}{y}$$

यदि स्पर्श रेखा x अक्ष के समानान्तर है तो $\frac{dy}{dx}=0$

अतः $\frac{1-x}{y}=0$

या $x=1$

अब x का मान वक्र में रखने पर

$$1+y^2-2-3=0$$
$$y^2=4$$
$$y=\pm 2$$

अतः विन्दुओं (1, 2) और (1, −2) पर वक्र की स्पर्श रेखा x − अक्ष के समानान्तर होगी।

6. x − अक्ष और वक्र $y = \frac{x}{1+x}$ के वीच का कोण निकालो।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\frac{d}{ax}(1+x)-(1+x)\frac{d}{dx}x}{(1+x)^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2=\frac{x-1-x}{(1+x)^2}=\frac{-1}{(1+x)^2} \text{ तथा } \left(\frac{dy}{dx}\right)_1$$

जो कि −x अक्ष का प्रवणता है शून्य है।

वक्र x अक्ष को विन्दु x = 0 पर मिलाती हैं

अतः $\left(\frac{dy}{dx}\right)_2$ at $(0, 0) = -1$

अतः $\tan\theta = \dfrac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \sim \left(\frac{dy}{dx}\right)_2}{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_2}$

$$=\frac{0+1}{1-1\times 0}=1$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

7. सिद्ध करो कि $x^3-3xy^2=a$ और $3x^2y-y^2=b$ लंब-कोणीय हैं।

वक्र $x^3-3xy^2=a$

और $3x^2y-y^3=b$ को क्रमशः अवकलन करने पर

$$3x^2-3y^2-6xy\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=\frac{x^2-y^2}{2xy}\text{........(i)}$$

और $6xy+3x^2\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}=0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{-2xy}{x^2-y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

(i) और (ii) से—

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{x^2-y^2}{2xy} \times \frac{-2xy}{x^2-y^2}$$
$$= -1$$

अतः ये दोनों वक्र लम्ब कोणीय हैं ।

## प्रश्नावली 17

1. वक्र $y^2(x-1)=4x^2$ के लिये, विन्दु (5,5) पर, स्पर्श रेखा ज्ञात करो । —[U. P. Board 1953]

2. परवलय (Parabola) $y^2=4x$ के लिये, विन्दु (4,4) पर स्पर्श रेखा निकालो ।

3. वक्र $xy=16$ के लिये, बिन्दु (8,2) पर, स्पर्श रेखा निकालो ।
—[Vikram U. 1961]

4. नीचे लिखे हुए प्रत्येक वक्र के लिये विन्दु $(x_1\, y_1)$ पर स्पर्श रेखा ज्ञात करो ।
   (i) $x^2+y^2=a^2$ (ii) $xy=a^2$
   (iii) $\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=1$ (iv) $y=a\log\sin x$
   (v) $y=ae^x$ (vi) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
   (vii) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

5. उन विन्दुओं को ज्ञात करो जिन पर निम्न लिखित वक्रों के लिये स्पर्श रेखायें x— अक्ष के समानान्तर हों ।
   (i) $y=x^2+\sqrt{1-x^2}$ (ii) $y=x^{\frac{2}{3}}(x+a)^{\frac{1}{3}}$
   (iii) $5cy=x^2+10x$ —U. P. (1956)
   (iv) $x^2+y^2+2x-4y=20$

6. यदि $y=(x-10)(x-20)$ हो तो y का वह मान निकालो, जहाँ $\frac{dy}{dx}=0$ हो ।

7. वे सभी बिन्दुओं को निकालो जहाँ कि वक्र $y^2=4a\left\{x+a\sin\frac{x}{a}\right\}$ पर x अक्ष के समानान्तर स्पर्श रेखायें खीची जा सकें ।

8. वक्र $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ पर वे बिन्दुओं को निकालो, जिन पर खींची गई स्पर्श रेखायें x— अक्ष से समान कोंण बनाती हैं ।

9. वक्र $y=(x-2)(x-3)$ पर, किस बिन्दु पर स्पर्श रेखा खींची जायें, कि वह सरल रेखा $2y=10x+3$ के समानान्तर हो ।
[V. U. 1963]

10. यदि कोई बिन्दु P के निर्देशांक प्रचल के पद द्वारा दिये गये हैं ।
$$x=a\cos^3t,\ y=b\sin^3t$$
तो बिन्दु P पर स्पर्श रेखा का समीकरण निकालो ।

11. वक्र $x=a(t+\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ की स्पर्श रेखा बिन्दु 't' पर ज्ञात करो ।

12. सिद्ध करो कि वक्रों $ax^2+by^2=1$ और $a^1x^2+b^1y^2=1$ लम्बकोणीय हो तो
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1}$$

13. वृत्तों $x^2+y^2-4x-1=0$ और $x^2+y^2-2y-9=0$ का प्रतिच्छेद कोंण निकालो ।

14. सिद्ध करो $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ और $x^2+y^2=6$ वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोंण $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}$ है

15. सिद्ध करो कि दीर्घ वृत्त (Ellipse) $x^2+4y^2=8$ और अतिपरवलय (Hyperbola) $x^2-2y^2=4$ एक दूसरे को लम्बकोंणीय काटते हैं ।

16. $x^2+y^2-4x-1=0$ और $x^2+y^2-2y-9=0$ वक्रों के प्रतिच्छेद कोंण निकालो ।

17. वक्र $y^2=x$ पर वह बिन्दु निकालो, जिस पर खींची गई स्पश रेखा x— अक्ष से 45° का कोंण बनाती है ।

## अभिलम्ब

5.7. वक्र के किसी विन्दु पर अभिलम्ब वह रेखा है जो कि उस विन्दु से हो कर जाती है और उस विन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा पर लम्ब है।

### अभिलम्ब का समीकरण:-

माना कि $y=f(x)$ वक्र का समीकरण है विन्दु $(x_1, y_1)$ से हो कर जाने वाली कोई रेखा का समीकरण $y-y_1=m(x-x_1)$ है,........(i)

विन्दु $(x_1\ y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y-y_1=\frac{dy}{dx}(x-x_1)........(ii)$$

यदि (i) अभिलम्ब का समीकरण हो,

$$\text{तो } m \times \frac{dy}{dx} = -1$$

$$\text{या } m = \frac{-1}{\frac{dy}{dx}}$$

यह m का मान (i) में रखने पर-

$$y-y_1=\frac{-1}{\frac{dy}{dx}}(x-x_1)$$

$$\frac{dy}{dx}(y-y_1)+(x-x_1)=0$$

यह अभिलम्ब का समीकरण है।

### उदाहरणमाला 15

1. वक्र $y(2a-x)=x^2$ का बिन्दु $(a, a)$ पर अभिलम्ब का समीकरण निकालो

वक्र के समीकरण का अवकलन करने पर-

$$(2a-x)\frac{dy}{dx}+y(-1)=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{2a-x}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right), (a, a) \text{ पर} = \frac{2a+a}{2a-a}=3.$$

अत: अभिलम्ब का समीकरण

$$3\,(y—a) + (x—a)=o$$
$$3y+x=4a$$

2. यदि वक्र $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ का अभिलम्ब x— अक्ष से कोंण $\phi$ बनाता हो तो सिद्ध करो कि इसका समीकरण

$y\cos\phi—x\sin\phi=a\cos^2\phi$ है ।

$$\tfrac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{2}{3}\, y^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dx} = 0$$

अत: $\dfrac{dy}{dx} = —\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$

वक्र पर कोई विन्दु $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ है ।

अत: $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ $(a\cos^3\theta, \sin^3\theta)$ पर

$$= —\frac{a^{-\frac{1}{3}}\,(\cos\theta)^{-1}}{a^{-\frac{1}{3}}\,(\sin\theta)^{-1}}$$
$$= —\tan\theta$$

अत: विन्दु $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ पर अभिलम्ब का समीकरण

$\tan\theta\,(y—a\sin^3\theta) — (x—a\cos^3\theta) = 0$

$\cos\theta$ से दोनों पक्षों को गुणा करने पर

$$\sin\theta\, y— a\sin^4\theta — x\cos\theta + a\cos^4\theta = 0$$
$$y\sin\theta — x\cos\theta = a\,(\sin^4\theta —\cos^4\theta)$$

परन्तु $\phi = \dfrac{\pi}{2} + \theta$ अत: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ रखने पर

$$y\sin\left(\frac{\pi}{2} — \phi\right)—x\cos\left(\frac{\pi}{2} — \phi\right) = a\left[\sin^4\left(\frac{\pi}{2}—\phi\right) —\cos^4\left(\frac{\pi}{2}— \phi\right)\right]$$

$$y\cos\phi—x\sin\phi=a\,(\cos^4\phi—\sin^4\phi)$$
$$=a\,(\cos^2\phi—\sin^2\phi)\,(\cos^2\phi+\sin^2\phi)$$
$$y\cos\phi—x\sin\phi=a\cos2\phi$$

## प्रश्नावली 18

1. निम्नलिखित वक्रों के विन्दु $(x_1, x_1)$ पर अभिलम्ब निकालो ।

(i) $y^2=4ax$ (ii) $\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=1$

(iii) $y=a \log \sin x$ (iv) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2. परवलय $y^2 = 4ax$ के लिये, बिन्दु $(a, 2a)$ पर, अभिलम्ब का समीकरण निकालो

3. वक्र $yx^2+x^2-5x+6=0$ के लिये जहाँ वक्र x अक्ष को कांटती है, अभिलम्ब का समीकरण निकालो ।

4. वक्र $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ पर वे उन बिन्दुओं को निकालो जिन पर स्पर्श और अभिलम्ब रेखायें क्रमशः x—अक्ष के समानान्तर है ।

5. सिद्ध करो, यदि $y=x(x-2)(x-4)$ वक्र का अभिलम्ब y—अक्ष के समानान्तर हो तो सिद्ध करो भुजा $x=2\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ है ।

# अध्याय 6

## उत्तरोत्तर अवकलन
## [ Successive differentiation ]

**6.1. परिभाषा:–**यदि $y=f(x)$, $x$ का फलन है,

तो $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)$

को $y$ का प्रथम अवकल गुणांक कहते हैं।

यह $\frac{dy}{dx}$, $x$ का फलन होगा या एक अचर ेगा । यदि $x$ का फलन है तो हम फिर से अवकलित कर सकते हैं । अत:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ है ।}$$

फलन $y$ का द्वितीय और फलन $\frac{dy}{dx}$ का प्रथम अवकल गुणांक कहलाता है ।

यदि $\frac{df(x)}{dx}$ अचर है तो दुबारा अवकलित करने पर $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0$ होगा, अत: द्वितीय अवकल गुणांक शून्य होगा ।

यह $\frac{d^2y}{dx^2}$ फिर से $x$ का फलन होगा या कोई अचर होगा । यदि $\frac{d^2x}{dy^2}$, $x$ का फलन है तो हम फिर से अवकलित कर सकते हैं;

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

फलन $y$ का तृतीय, फलन $\frac{dy}{dx}$ का द्वितीय और फलन $\frac{d^2y}{dx^2}$ का प्रथम अवकल गुणांक कहलाता है ।

यदि $\frac{d^3y}{dx^3}$ अचर हो तो

$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ होगा ।

इस प्रकार अवकलित करने पर जो फलन मिलता है वह या तो x का फलन होगा या एक अचर होगा । यदि x का फलन है तो इसे फिर से अवकलित कर सकते हैं । इस क्रम (Process) को हम उत्तरोत्तर अवकलन कहते हैं ।

इसे हम निम्न किसी भी एक प्रतिकात्मक ढंग से लिखते हैं । n वां अवकल गुणांक

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n y,\ D^n y,\ y_n,\ \frac{d^n y}{dx^n},\ y^n \text{ लिखते हैं ।}$$

## उदाहरणमाला 16

6.2. यदि $y = (ax + b)^m$ हो, तो $y_n$ निकालो ।

$$y_1 = m(ax + b)^{m-1}a$$
$$y_2 = a^2 m(m-1)(ax + b)^m a^{-2}$$
$$y_3 = a^3 m(m-1)(m-2)(ax + b)^{m-3}$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$y_n = a^n m(m-1)(m-2)(m-n+1)(ax+b)^{m-n}$$

अत:

$$\frac{d^n(ax+b)^m}{dx^n} = y_n = m(m-1)\ldots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$$

(i) यदि ऊपर के परिणाम में

$m = -1$ हो तो

$$\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^{-1} = (-1)^n n(n-1)\ldots 1a^n (ax+b)^{-1-n}$$
$$= (-1)^n a^n \underline{|n} (ax+b)^{-1-n}$$

(ii) यदि $b=0$ और $a=1$ हो तो

$$\frac{d^n(x^m)}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)x^{m-n}.$$

6.3. $y=\log(ax+b)$ का नवाँ अवकल गुणांक निकालो ।

$$y_1 = \frac{a}{ax+b} = a(ax+b)^{-1}$$
$$y_2 = a^2(-1) ax+b)^{-2}$$
$$y_3 = a^3(-1)^2 (ax+1b)^{-3} 1.2,$$
$$= a^3(-1)^2 \underline{|2} (ax+b)^{-3}$$

$$y_4 = a^4 (-1)^3 \lfloor 3 \; (ax+b)^{-4}$$

— — — —

— — — —

$$y_n = a^n (-1)^{n-1} \lfloor n-1 \; (ax+b)^{-n}$$

**6.4. Sin (ax+b) का n वाँ अवकल गुणांक**

माना $y = \text{Sin}\,(ax + b)$

$$y_1 = a \cos (ax + b) = a \,\text{Sin} \left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_2 = a^2 \,\text{Cos} \left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= a^2 \,\text{Sin} \left(ax + b + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_3 = a^3 \,\text{Sin} \left(ax + b + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

— — — —

— — — —

$$yn = a^n \,\text{Sin} \left(ax + b + n\frac{\pi}{2}\right)$$

इसी प्रकार यदि

$y = \text{Cos}\,(ax + b)$ हो तो

$$yn = a^n \,\text{Cos} \left(ax + b + n\frac{\pi}{2}\right)$$

**6.5. $e^{ax}$ का nवां अवकल गुणांक**

$$y = e^{ax}$$
$$y_1 = a\, e^{ax}$$
$$y_2 = a^2 e^{ax}$$

— — — —

— — — —

$$yn = a^n e^{ax}.$$

**6.6. $y = e^{ax}.\,\text{Sin}\,(bx + c)$ का n वाँ अवकल गुणांक**

$$y_1 = e^{ax}.\frac{d}{dx}\text{Sin}\,(bx + c) + \text{Sin}\,(bx + c)\frac{d}{dx}e^{ax}$$

$$= b.\, e^{ax}\,\text{Cos}\,(bx + c) + a.\, e^{ax}\,\text{Sin}\,(bx + c) \ldots\ldots (i)$$

यदि $a = r\,\text{Cos}\,\phi\,;\; b = r\,\text{Sin}\,\phi$ हो

तो $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ और $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

होगा । ये मान समीकरण (i) में रखने पर

$$y_1 = re^{ax}\,[\text{Cos}\,\phi\,\text{Sin}\,(bx + c) + \text{Sin}\,\phi\,\text{Cos}\,(bx+c)]$$
$$= r\,e^{ax}\,\text{Sin}\,(bx + c + \phi)$$
$$y_2 = r\,[a.\, e^{ax}\,\text{Sin}\,(bx + c + \phi) + b.\, e^{ax}\,\text{Cos}\,(bx+c+\phi)]$$

$= r^2 e^{ax} [\text{Cos}\,\phi\ \text{Sin}\,(bx + c + \phi) + \text{Sin}\,\phi\ \text{Cos}\,(bx+c+\phi)]$

$= r^2\, e^{ax}\ \text{Sin}\,(bx + c + 2\,\phi)$

— — — —

— — — —

$y_n = r^n e^{ax}\ \text{Sin}\,(bx + c + n\phi)$

इसी तरह से यदि

$y = e^{ax}\ \text{Cos}\,(bx + c + n\phi)$ हो तो

$y_n = r^n e^{ax}\ \text{Cos}\,(bx + e + n\phi)$

## 6.7 उदाहरणमाला 17

1. $\text{Cos}^3 x$ का n वाँ अवकल गुणांक निकालो ।

$y = \text{Cos}^3 x = \frac{1}{4}(\text{Cos}\,3x - 3\,\text{Cos}\,x)$

अतः सूत्र का उपयोग करने पर

$$y_n = \frac{1}{4}\left[3^n\ \text{Cos}\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) - 3\,\text{Cos}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

2. $y = \dfrac{x}{(a + bx)}$ का $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ निकालो ।

$$y = \frac{1}{b} - \frac{a}{b(bx + a)}$$

$$= \frac{1}{b} - \frac{a}{b}(bx + a)^{-1}$$

$y_1 = a\,(bx + a)^{-2}$

$y_2 = ab\,(-1)\,\underline{|2}\,(bx + a)^{-3}$

$y_n = (-1)^{n-1}\,a.\,b^{n-1}\,\underline{|n}\,(bx + a)^{-n-1}.$

## प्रश्नावली 19

1. $(2x + 3)^{10}$, $e^{ax}$, $\text{Sin}\,(2x + 5)$, $\log\,(3x + 7)$ फलनों के 5 वाँ अवकल गुणांक निकालो ।

2. $y = \frac{1}{2}\log\dfrac{x + a}{x - a}$, तो सिद्ध करो कि

$y_n = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}\,\underline{|n-1}\,[(x - a)^{-n} - (x + a)^{-n}]$

3. $y = \text{Sin}\,3x\ \text{Sin}\,7\,x$ का n वाँ अवकल गुणांक निकालो ।

4. $y = e^{3x}.\ \text{Cos}\,5x$ का n वाँ अवकल गुणांक निकालो ।

5. निम्नलिखित फलनों के n वां अवकल गुणांक निकालो ।

(i) $e^{ax}\ \text{Cos}^2\,bx$ (ii) $\text{Sin}^2 x\ \text{Sin}\,2x$

(iii) $e^x.\ \text{Sin}^2 x\ \text{Sin}\,2x$

(iv) $y = \sqrt{x + a}$

# साधारण-समाकलन

## (Simple Integration)

# समाकल गणित के लिए मुख्य सूत्रों का संग्रह

1. $\int x^n d = x \frac{x^{n+1}}{n+1}, \; n \neq -1$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \log_e x$

3. $\int e^x dx = e^x$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e {}^a}$

5. $\int \mathrm{Sin}x \, dx = -\cos_x$

6. $\int \mathrm{Cos}x \; dx = \mathrm{Sin}x$

7. $\int \tan x \, dx = -\log \cos x$
$= \log \sec x$

8. $\int \cot x \, dx = \log \mathrm{Sin} \, x$

9. $\int \mathrm{Sec} \, x \; dx =$
$\log \{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\}$
$= \log (\mathrm{Sec} \, x + \tan \, x)$

10. $\int \mathrm{Coseex} \, dx = \log \tan \frac{x}{2}$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$
$\sin^{-1} \frac{x}{a}$

12. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \; dx =$
$\frac{1}{a} \tan^{-1} x$

13. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \; dx =$
$\frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a}$

14. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \; dx =$
$\log \{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \; dx =$
$\log \; (x + \sqrt{x^2 - a^2})$

16. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \; dx$
$= \frac{1}{2} x \; \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2$
$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

17. $\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx$
$= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}$
$\mathrm{Sint}^{-1} \frac{x}{a}$

18. $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx$
$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}$
$\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}$
$\mathrm{Sec}^{-1} \frac{x}{a}$

20. $\int e^{ax} \; \mathrm{Sin} \; bx \; dx$
$= \sqrt{a^2 + b^2} \; e^{ax}$
$\mathrm{Sin} \left[bx - \tan^{-1} \left(\frac{b}{a}\right)\right]$

21. $\int e^{ax} \mathrm{Cos} \; bx \; dx$
$= \sqrt{a^2 + b^2} \; e^{ax}$
$\mathrm{Cos}\left(bx - \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)$

22. $\int (ax + b)^n \; dx =$
$\frac{(ax + b)^{n+1}}{(n+1) \; a}$

23. $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a}$
$\log \; (ax + b)$

24. $\int \mathrm{Sin} \, (ax + b) =$
$\frac{-\mathrm{Cos}(ax + b)}{a}$

25. $\int e^{ax} \; dx = \frac{1}{a} \; e^{ax}$

etc.

# अध्याय 7

## साधारण समाकलन
## (Simple Integration)

**7.1.** अध्याय एक में पढ़ चुके हैं कि समाकल गणित, अवकल गणित के उत्क्रम होता है। यह क्षेत्रफल, आयतन, लम्बाई आदि निकालने के उपयोग में आता है।

माना कि $y = F(x)$ है तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x), \text{ (मान लो)}$$

तः $\frac{dy}{dx}$ का समाकल या $f(x)$ का $x$ के साक्षेप में समाकल मूल फलन होता है। अतः

$$\int (fx)dx = F(x)$$

इसलिए

$$\int \cos\ dx = \sin x$$

या $\cos x$ का समाकल $\sin x$ होगा। इसी तरह से

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int e^x dx = e^x.$$

क्योंकि अचर का अवकल गुणांक शून्य होता है अतः प्रत्येक फलन का समाकल निकालने के बाद अचर जोड़ना चाहिये। यह अचर समाकलन का अचर कहलाता है।

### 7.2. फलन और अचर के गुणनफल का समाकलनः—

माना कि $\int f(x)\, dx = F(x)$

तो परिभाषा से

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$$

अवकल गणित द्वारा

$$\frac{d}{dx}\{af(x)\} = af(x)$$

अतः समाकल की परिभाषा से

$$\int \frac{d}{dx}\{aF(x)\}dx = \int af(x)dx \text{ है}$$

या $\quad \int af(x)dx = aF(x)$ है ।

## 7.3. योगफल का समाकल

माना कि

$$\int f_1(x)dx = F_1(x)$$

और $\quad \int f_2(x)\,dx = F_2(x)$

इसलिए

$$\frac{d}{dx}\{F_1(x)+F_2(x)\}$$

$$=\frac{d}{dx}F_1(x) + \frac{d}{dx}F_1(x)$$

$$=f_1(x)+f_2(x)$$

समाकल की परिभाषा से

$$\int \{f_1(x) + f_2(x)\}\,dx = \int \frac{d}{dx}\{F_1(x) + F_2(x)\}\,dx$$

$$= F_1(x) + F_2(x)$$

अतः

$$\int\{f_1(x) + f_2(x)\}\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

इसी तरह से

$$\int\{f_1(x) \pm f_2(x)\ldots\}\,dx = \int f_2(x)\,dx + \ldots$$

## 7.4. मानक रूप (Standard forms)

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \int \sec x \tan x\,dx = \sec x.$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \log x, \quad \int \operatorname{cosec} x.\cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x$$

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x$$

$$\int a^x dx = \left[\frac{a^x}{\log_e a}\right], \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = [\sec^{-1}x]$$

$\int \sin x\, dx = -\cos x$ , $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}x$

$\int \cos x\, dx = \sin x$ , $\int \frac{-1}{1+x^2} dx = -\cot^{-1}x$

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x$ , $\int \cosh x\, dx = \sinh x$

$\int \text{cosce}^2 x\, dx = -\cot x$ , $\int \sinh dx = \cosh x.$

## प्रश्नावली 20

निम्नलिखित फलनों का समाकल निकालो

1. $x^4$, $x^{500}$, 1, 0, $5x^6$
2. $x^{-3}$, $x^{-1/3}$, $x^{-110}$, $6x^{-5}$
3. $x^{1/3}$, $x^{-3/4}$, $x^{-5/3}$, $x^{-3/2}$
4. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$
5. $\sqrt{ax^3} + \frac{b}{x^5}$
6. $1 + x + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots$
7. $\frac{ax^{-2} + bx^{-1} + c}{x^{-3}}$
8. $\frac{a+x}{a}$
9. $\frac{(a+x)^3}{\sqrt{x}}$ , $\frac{4x^2+3x+2}{x^3}$ , $10^x + 3e^x + x^5$
10. $x^{-3/2}(x^2 + 2x - 3)$, $\frac{(7+x^2)^2}{x}$
11. $\sec x.\tan x - 5\operatorname{cosec}^2 x$
12. $\frac{1}{\sin x\ \tan x} + \cot^2 x$
13. $x^n + a^x$
14. $10^x + 3e^x + 5x^{-5}$
15. $\frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$
16. $\cos^2\frac{x}{2}$ , $\cos x\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)$,

    $\sqrt{1 - \sin 2x}$ , $\frac{4 + 5\sin x}{\cos^2 x}$ , $\frac{3 + 4\cos x}{\sin^2 x}$

# अध्याय 8

## प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन
## (Integration by Substitution)

**8.1.** बहुत से फलनों का समाकल प्रतिस्थापन विधि द्वारा निकाला जाता है। इस विधि में चर x के लिए कोई उचित प्रतिस्थापन करना चाहिए।

यदि $I = \int f\{\phi(x)\}\, \phi'(x)\, dx$

माना कि $\phi(x) = t$ तो

$$\frac{d\,\phi(x)}{d\,t} = 1$$

अतः
$$\begin{aligned} I &= \int f(t)\, dt \\ &= F(t) \\ &= F(\phi(x)). \end{aligned}$$

### 8.2 उदाहरणमाला 18

**1.** $\int x \operatorname{Cos} x^2\, dx$ का मान निकालो

माना कि $x^2 = t$

दो पक्षों को अवकलन करने पर

$$2x\, dx = dt$$

अतः $$x\, dx = \frac{dt}{2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \cos x^2 .\, x\, dx \\ &= \int \cos t \ \frac{dt}{2} \\ &= \tfrac{1}{2} \int \cos t\, dt \\ &= \tfrac{1}{2} \sin t \\ &= \tfrac{1}{2} \sin (x^2). \end{aligned}$$

**2.** $\int e^x . \operatorname{Cos} e^x\, dx$ का मान निकालो।

माना कि $e^x = t$

अतः $e^x\,dx = dt$

इसलिए

$$I = \int e^x . \cos e^x \; dx$$
$$= \int \cos t \; dt$$
$$= \sin t$$

t का मान रखने पर

$$= \sin e^x$$

3. $\int \frac{\cos \tan^{-1}(x)}{1+x^2}\,dx$ का मान निकालो ।

$$I = \int \frac{\cos \tan^{-1}(x)}{1+x^2}\,dx$$

में $\tan^{-1}x = t$ रखो

$$\frac{1}{1+x^2}\,dx = dt$$

अतः

$$I = \int \frac{\cos t}{1}\,dt$$
$$= \sin t$$

t का मान रखने पर

$$= \sin(\tan^{-1} x)$$

4. $\sin^m x \cos x$ को x के सापेक्ष से समाकलन करो ।

माना कि $\sin x = t$

अतः $\cos x\,dx = dt$

$$I = \int (\sin x)^m \cos x\,dx$$
$$= \int t^m\,dt$$
$$= \frac{t^{m+1}}{m+1}$$
$$= (\sin x)^{m+1}/_{m+1}.$$

## प्रश्नावली 21

**x के संदर्भ में समाकलन करो ।**

1. $\frac{\sin(\log x)}{x}$

2. $e^x \, \text{Sin}\, e^x$

3. $\sec^{n+1} x \tan x$

4. $\dfrac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ [विक्रम 1964]

5. $\displaystyle\int \frac{(\log x)^n}{x}\, dx$ [राजस्थान 1963]

6. $\int \cos^m x . \sin x\, dx$ [दिल्ली 1948]

7. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx$ [विक्रम 1964]

8. $\displaystyle\int \frac{a^{\log x}}{x}\, dx$

9. $\int \sec^2 (\sin x). \cos x\, dx$

10. $\int \sin (\sec x) \tan x. \sec x\, dx.$

**8.3. f (ax+b) का समाकलन**

$$I = \int f(ax+b)\, dx$$

माना कि $\int f(x)\, dx = F(x)$

अब $ax + b = t$ रखने पर

$$a\, dx = dt$$

अतः

$$I = \frac{1}{a}\int f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{a} F(t)$$

$$= \frac{F(ax+b)}{a}$$

**8.4. sin (ax+b) का समाकलन**

माना कि $ax + b = t$

अतः $a\, dx = dt$

$$\int \sin(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int \sin t\, dt$$

$$= -\frac{1}{a}\cos t$$

$$\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b).$$

8.5. $(ax+b)^n$ का समाकलन

माना कि $ax + b = t$

$$a\,dx = dt$$

$$I = \int (ax + b)^n \, dx = \int \frac{t^n}{a} \, dt$$

$$= \frac{1}{a} \frac{t^{n+1}}{n + 1}$$

$$= \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1}$$

इसी तरह से निम्न सूत्र प्राप्त होते हैं

$$\int \cos (ax + b) = \frac{\sin (ax + b)}{a}$$

$$\int \frac{1}{ax + b} = \frac{1}{a} \log (ax + b)$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

8.6. $\dfrac{1}{a^2 + x^2}$ का समाकलन

माना कि $x = at$

$$dx = a \, dt$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$= \frac{1}{a} \tan^{-1} (t)$$

$$= \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a}\right)$$

अत:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

इसी तरह से

$$\int \frac{-1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \text{Cot}^{-1} \frac{x}{a}$$

8.7 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ का समाकलन

माना कि $x = a\,t$

$$dx = a \, dt$$

अतः

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, a\, dt$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$$

$$= \sin^{-1}(t)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

**8.8** $\frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ **का समाकलन ।**

माना कि $x = at$

$dx = a\, dt$

अतः

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$$

$$= \int \frac{a\, dt}{at\sqrt{a^2 t^2 - a^2}}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{a} \sec^{-1}(t).$$

$$= \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

## 8.9. उदाहरणमाला 19

1. $\int \frac{dx}{(3 - 4x)^{\frac{3}{4}}}$ को हल करो ।

माना कि $3 - 4x = t$

$-4dx = dt$

$dx = -\frac{1}{4}\, dt$

अतः

$$I = \int \frac{dx}{(3-4x)^{\frac{3}{4}}}$$

$$= -\tfrac{1}{4} \int \frac{dt}{.t^{\frac{3}{4}}}$$

$$= -\tfrac{1}{4} \frac{t^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} = (3-4x)^{-\frac{1}{4}}$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(2-3x)^2}}$ को हल करो ।

माना कि $2-3x = t$

$dx = -\tfrac{1}{3}\, dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-(2-3x)^2}} = -\tfrac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-(2-3x)^2}} = -\tfrac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{2-3x}{2}\right)$$

3. $\sqrt{1+\sin x}$ का समाकलन करो ।

$$I = \int \sqrt{(1+\sin x)}\; dx$$

$$= \int \sqrt{\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}\right)} dx$$

$$= \int \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}\; dx$$

$$= \int \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) dx$$

$\frac{x}{2} = t$ रखने पर

$dx = 2dt$

$$I = 2\int (\cos t + \sin t)\, dt$$

$$= 2\,[\sin t - \cos t]$$

$$= 2\left[\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right]$$

## प्रश्नावली 22

x के संदर्भ में समाकलन कीजिये ।

1. $(3-2x)^5$, $\sqrt{6x+a}$, $(7x+6)^{7/2}$, $\sqrt{a(cx+d)}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$, $\dfrac{1}{(ax+b)^3}$, $\dfrac{1}{(3x+5)^6}$

3. $\sin ax$, $\cos n x$, $\sin \dfrac{k}{2} x$

4. $\operatorname{cosec}^2 (2-3x)$, $\sec^2 (5x-6)$, see ax tan ax.

5. $10^{5x}$, $a^{9x}$, $e^{ax}$, $e^{(ax+b)}$,

6. $\dfrac{1}{ax+b^2}$, $\dfrac{1}{a^2x-b^2}$, $\dfrac{1}{2x-6}$

7. $e^{3x} + 2\sin (2x+5) + 3\sec^2 (ax+b)$

8. $\dfrac{1}{5x} + \sec (ax+5) \tan (ax+5) + \operatorname{cosec}^2 bx.$

9. $\dfrac{x^2}{3+x^2}$, $\dfrac{1+2x}{9-x}$, $\dfrac{x^2+2ax+b}{(a+x)^2}$, $\dfrac{x^2+4x+4}{(x+2}$

10. $\dfrac{1}{1+\cos 2x}$ [विक्रम 1963]

11. $\dfrac{1}{1+\cos x}$ [पंजाब 1958]

12. $\cos^2 x - \sin^2 x$

13. $\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ 14. $\dfrac{1}{1-\text{Cos}\, ax}$

8.10. **tan x और cot x का समाकल ।**

$$I = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$\cos x = t$ रखने पर हमें

$$-\sin x \, dx = dt$$

$$I = -\int \frac{1}{t} \, dt = -\log t = -\log \cos x$$

$$= \log \sec x.$$

$$I = \int \tan x \, dx = \log \sec x$$

इसी तरह से

$$\int \cot x \, dx = \log \sin x.$$

**8.11. cose x और sec x का समाकल**

(i) $I = \int \operatorname{cosec} x \, dx$

$$= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

हर और अंश को $\cos^2 \frac{x}{2}$ से भाग देने पर

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{2. \tan \frac{x}{2}} \, dx$$

माना कि $\tan \frac{x}{2} = t$

$$\tfrac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \, dx = dt$$

$$I = \int \frac{1}{t} \, dt = \log t$$

$$= \log \left( \tan \frac{x}{2} \right)$$

(ii) $I = \int \sec x \, dx$

$$= \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \int \frac{dx}{\sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right)}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = t$$

$$dx = dt$$

$$I = \int \frac{dt}{\sin t}$$

$$= \log \tan \frac{t}{2}$$ पिछले सूत्र से ।

$$= \log \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

**वैकल्पिक परिभाषा (Alternative definition)**

$$I = \int \sec x \, dx$$

अंश और हर को $(\sec x + \tan x)$ से गुणा करने पर

$$= \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}\, dx$$

माना कि $\sec x + \tan x = t$

$$(\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx = dt$$

अत:

$$I = \int \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \log t = \log(\sec x + \tan x)$$

इसलिए

$$\int \sec x \, dx = \log \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \log(\sec x + \tan x)$$

दोनों में से किसी भी सूत्र का उपयोग कर सकते हैं ।

## 8.12. उदाहरणमाला 20

1. $\int \frac{nx^{n-1}}{a^n + x^n}\, dx$ को हल करो ।

माना कि $a^n + x^n = t$

$$n\,x^{n-1}\, dx = dt$$

$$I = \int \frac{n\,x^{n-1}}{a^u + x^n}\, dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log t = \log(a^n + x^n).$$

2. $\int (1 + \sin x)^3 \cos x \, dx$ को हल करो ।

माना कि $1 + \sin x = t$

$$\cos x \, dx = dt$$

$$I = \int (1 + \sin x)^3 \cos x \, dx$$

$$= \int t^3 \, dt$$

$$= \tfrac{1}{4}t^4 = \tfrac{1}{4}(1 + \sin x)^4.$$

3. $\int \frac{\sec(\tan^{-1} x)}{1 + x^2}$ को हल करो ।

माना कि $\tan^{-1} x = t$

$$\frac{1}{1+x^2}\,dx = dt$$

इसलिए

$$\int \sec t\, dt$$
$$= \log(\sec t + \tan t) = \log\left(\sqrt{1+\tan^2 t} + \tan t\right)$$
$$= \log\left(\sqrt{1+x^3} + x\right)$$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{a \sin x + b \cos x}\, dx$

$a = r\cos\alpha$ और $b = r\sin\alpha$ रखने पर

$$r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$I = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \int \frac{dx}{r(\cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x)}$$
$$= \frac{1}{r}\int \frac{dx}{\sin(\alpha + x)} = \frac{1}{r}\int \operatorname{cosec}(\alpha + x)\, dx$$
$$= \frac{1}{r}\log\tan\tfrac{1}{2}(x+\alpha)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\tan\tfrac{1}{2}\left(x + \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

## प्रश्नावली 23

निम्न समाकल का हल करो ।

1. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}\, dx$ ; $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\, dx$
2. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{(5x^3+1)^2}\, dx$ , $\displaystyle\int \frac{4x^3+2x+k}{x^4+x^2+kx+d}\, dx$
3. $\int \sin^{-2}x \cos x\, dx$ , $\int \sin x^2\, x\, dx$ , $\int (ax+b)^2\, dx$.
4. $\int (a+\cos x)^2 \sin x\, dx$.
5. $\int x^5\sqrt{1+x^6}\, dx$,
6. $\int \operatorname{cosec} 2x\, dx$ , $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x - 4\sin^3 x}$

7. $\int x^5 \text{ see } (3x^6)dx$, $\int \frac{\sec(\tan^{-1} x)}{1+x^2} dx$

8. $\int \text{cosec}(\text{cosec } x).\ \text{cosec } x.\ \cot x\ dx.$

9. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ , 10. $\int \frac{\cot x}{\log \sin x}$

11. $\int \frac{\cot \log x}{x} dx$ ; 12. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$

13. $\int \frac{\cos^2 x . \sin x\ dx}{1+\cos^3 x}$ , 14. $\int \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x} dx$

15. $\int \frac{(\sec x + \tan x) \sec x}{(\sec x + \tan x)^{10}} dx$ , 16. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

17. $\int \frac{e^x}{1 + c e^x} dx$ [राजस्थान 1960]

18. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{a(e^x - e^{-x})} dx$ [विक्रम 1964]

19. $\int \frac{b + c e^x}{bx + c e^x}$ , 20. $\int \frac{x^{e-1} + e^x}{x^e + e^x} dx$

21. $\int \frac{\text{Sin } x}{\text{Sin }(x-a)} dx$ , 22. $\int \frac{\tan(\cos^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

23. $\int \frac{x^3 (\tan^{-1} x^4)}{1+x^8} dx$ , 24. $\int 2x \text{ Cos}^3 x^2 . \text{ Sin } x^2\ dx$

25. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$, 26. $\int \frac{dx}{a \sin x - b \cos x}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 \pm \cos 2x}}$, 28. $\int \frac{dx}{(\sec x + \tan x)(\text{see } x - \tan x)}$

29. सिद्ध करो कि

$$\int \tfrac{1}{2} \left(\cot x + \tan \frac{x}{2}\right) = \log \tan \frac{x}{2}$$

## 8.13. त्रिकोणमिति का समाकलन में उपयोग

1. $I = \int \text{Cos } mx.\ \cos nx\ dx$ को हल करो

$I=\frac{1}{2}\int \{\cos (m+n)x+\cos (m—x)x\}\ dx$, त्रिकोणमिति द्वारा

$$=\frac{1}{2}\ \frac{\sin (m+n)x}{m+x}+\frac{1}{2}\ \frac{\sin (m—n)x}{m—x}$$

2. $\int \sin 2x.\ \cos^2x\ dx$ को हल करो।

$$I = \int \sin 2x \cos^2x\ dx$$
$$= 2\int \sin x.\ \cos x.\ \cos^2x\ dx$$
$$= 2\int \sin x.\ (\cos x)^3\ dx$$
$$\cos x=t$$
$$—\sin x\ dx=dt$$
$$=—2\int t^3\ dt$$
$$= —\tfrac{1}{2}\ t^4 = —\tfrac{1}{2}\ (\cos x)^4.$$

8.14. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ का समाकल।

माना कि $x=a \tan \theta$

$dx=a \sec^2 \theta\ d\theta$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a \sec^2\theta\ d\theta}{\sqrt{a^2 \tan \theta+a^2}}$$
$$=\int \sec \theta\ d\ \theta = \log (\tan \theta+\sec \theta)$$
$$= \log\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)$$
$$= \log\ (x+\sqrt{x^2+a^2}\ ) — \log a$$

$\{—\log a\}$ अचर है, अतः इसे समाकल के अचर के साथ ले सकते हैं। अतः

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left\{x+\sqrt{x^2+a^2}\right\}$$

8.15. $\frac{1}{\sqrt{x^2—a^2}}$ का समाकल

माना कि $x=a \sec \theta$

$dx=a \sec \theta\ \tan \theta$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2—a^2}}=\int\frac{a. \sec \theta \tan \theta}{\sqrt{a^2 \sec^2 \theta—a^2}}$$
$$=\int \sec \theta\ d\ \theta.$$
$$= \log (\sec \theta+\tan \theta)$$

$$= \log \left[\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right]$$

$$= \log (x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \log a$$

{—log a} को समाकल के अचर में लेने पर

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log (x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

## 8.14. $\sqrt{a^2 - x^2}$ का समाकलन

माना कि $x = a \sin \theta$

$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= \int \sqrt{(a^2 - a^2 \sin^2 \theta)}.\ a \cos \theta \, d\theta$$

$$= \int a^2 \sqrt{(1 - \sin^2\theta)}.\ \cos \theta \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int 2 \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]$$

$$= \frac{a^2}{2} [\theta + \sin \theta \cos \theta]$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\sin^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)$$

$$= 2 \int \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

## 8.15. उदाहरणमाला 21

1. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ का मान निकालो

माना कि $x^2 = t$

$$2x\, dx = dt$$

$$I = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sin^{-1} (t) = \frac{1}{2} \sin^{-1} (x^2)$$

2. $\int (x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx$ का मान निकालो ।

$I = \int (x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx$

$= \int x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int \sqrt{1-x^2}\,dx$

पहले भाग में $1-x^2=t$ रखने पर

$= \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt + \int \sqrt{1-x^2}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}x\right]$

$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}x\right]$

## प्रश्नावली 24

समाकल निकालो ।

1. $\sin^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos^2 x$.
2. $\sin 5x \sin 7x$, $\cos 8x \cos 2x$, $\cos 3x \sin 5x$.
3. $\sin 3x \cos^3 x$, $\sin nx \cos^2 x$, $\sin mx \cos nx$.
4. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^6-9}}\,dx$ , 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x2}}$
6. $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$ , 7. $\int \frac{2x}{x^2-2}\,dx$
8. $\int \frac{x+1}{x^2+9}\,dx$ , 9. $\int x^3\sqrt{a^2-x^8}\,dx$
10. $\int \frac{\sec^2 x}{3+\tan x}\,dx$, 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$
12. $\int \cos x\sqrt{4-\sin^2 x}\,dx$ 13. $\int \frac{x+6}{\sqrt{x^2+8x+16}}$
14. $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$ विक्रम 1963

# अध्याय 9

## खंडशः समाकलन

## (Integration by parts)

9.1. समाकल की यह रीति प्रायः तभी उपयोग में लाते हैं, जब कि प्रतिस्थापन रीति को उपयोग में न ला सकें। यह रीति अधिकतर उन फलनों में उपयोग लाते हैं जो कि फलनों का गुणनफल हो। कुछ फलन ऐसे भी होते हैं जो फलनों का गुणनफल नहीं है, पर उनका समाकल, खंडशः समाकल रीति द्वारा निकाला जा सकता है।

माना कि $\phi$ (x) और $\psi$ (x), x के दो फलनें हैं।

$$\frac{d}{dx}\{\phi(x).\ \psi(x)\} = \phi(x).\ \psi'(x) + \psi(x).\ \phi'(x)$$

दोनों पक्षों का x के संदर्भ में समाकलन करने पर

$$\phi(x)\ \psi(x) = \int \phi(x).\ \psi'(x)\ dx + \int \psi(x).\ \phi'(x)\ dx$$

या

$$\int \phi(x).\ \psi'(x)\ dx = \phi(x).\ \psi(x) - \int \psi(x).\ \phi'(x)\ dx \ldots\ldots (i)$$

यदि $\phi(x) = f_1(x)$ और $\psi'(x) = f_2(x)$ हो और $\psi(x) = \int f_2(x)\ dx$

तो इनका माना समीकरण (i) में रखने पर

$$\int f_1(x).\ f_2(x)\ dx = f_1(x).\ \int f_2(x)\ dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} f_1(x) \times \int f_1(x)\ dx \right\} dx.$$

इसे नीचे लिखे हुए तरीके से पढ़ सकते हैं।

$f_1$ (x). $f_2$ (x) के गुणनफल का समाकल

= पहला फलन × दूसरे फलन का समाकल

—[ पहले का अवकलन × दूसरे फलन का समाकलन ] का समाकलन।

**टिप्पणी:**—इस रीति के लिए पहला फलन वह लेते हैं (i) जिसका समाकल आसानी से न निकाल सकें या (ii) वह फलन (यदि सम्भव हो) जिसको कुछ निश्चित वार अवकलन करने पर शून्य हो जाये।

## 9.2 उदाहरणमाला 22

1. $\int x^2 \cos x\, dx$ का मान निकालो

यहाँ $x^2$ को पहला फलन लेते हैं क्योंकि इसका तीसरा अवकल गुणांक शून्य है और $\cos x$ को दूसरा फलन लेते हैं।

$$I = \int x^2 \cos x\, dx$$

$$= x^2 \int \cos x\, dx - \int \left[\frac{d}{dx} x^2 . \int \cos x\, dx\right] dx$$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx$$

दूसरे भाग को पुन: समाकल करने से

$$I = x^2 \sin x - 2\left[ x \int \sin x\, dx - \int \left[\frac{d}{dx} x . \int \sin x\, dx\right] dx \right]$$

$$= x^2 \sin x - 2[-x \cos x + \int \cos x\, dx]$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - \sin x.$$

2. $\int \log x .\, dx$ का मान निकालो।

इसमें $\log x$ को पहला फलन क्योंकि इसका समाकलन मालूम नहीं है और 1 को दूसरा फलन लेते हैं।

$$I = \int \log x .\, 1\, dx = \log x . \int dx - \left\{ \frac{d}{dx} \log x . \int 1\, dx \right\} dx$$

$$= x . \log x - \int \frac{1}{x} . x\, dx$$

$$= x \log x - \int 1 .\, dx$$

$$= x \log x - x$$

$$= x [\log x - 1]$$

$$= x (\log_e x - \log_e e)$$

$$= x \log_e \frac{x}{e}$$

3. $\int x \cos 2x$ को हल करो।

$$I = \int x . \cos 2x\, dx$$

$$= x \int \cos 2x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} x . \int \cos 2x\, dx \right\} dx$$

$$= x\,\frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\cos 2x.$$

**4.** $\int x \sin x \cos 2x\, dx$ को हल करो ।

$$I = \int x \sin x \cos 2x = \tfrac{1}{2}\int x.\,2\,(\sin x \cos 2x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int x\,(\sin 3x - \sin x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int x \sin 3x\,dx - \tfrac{1}{2}\int x \sin x\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[x.\int \sin 3x\,dx - \int\left[1.\int \sin 3x\,dx\right]dx\right] - \tfrac{1}{2}\left[x\int \sin x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x.\sin x\,dx\right\}dx\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[-\frac{x}{3}\cos 3x + \int \frac{\cos 3x}{3}\,dx\right] - \tfrac{1}{2}\left[-x\cos x + \int \cos x\,dx\right]$$

$$= -\frac{x}{6}\cos 3x + \frac{1}{8}\sin 3x + \frac{x}{2}\cos x - \tfrac{1}{2}\sin x$$

## प्रश्नावली 25

खंडश: रीति से समाकल निकालो ।

1. $x.\sin x$, $\quad x\sec^2 x$, $\quad x^2 e^2$
2. $x^2 e^{-x}$, $\quad x^2 e^{ax}$, $\quad x^2.\log x$
3. $\tan^{-1} x$ , $\qquad$ 4. $x^2 \sin x$
5. $x^2 \cos x$ $\qquad$ 6. $x^3 \sin x$
7. $x \cos^3 x$ $\qquad$ 8. $x^3 \cos x$
9. $x \sin \sqrt{x}$ $\qquad$ 10. $\sqrt{x}\,\sin\sqrt{x}$
11. $x \tan^2 x$ $\qquad$ 12. $x \sin 4x.\cos 6x$
13. $\sin^{-1} x$ $\qquad$ 14. $\operatorname{cosec}^{-1} x$
15. $x\,\text{see}^{-1} x$ $\qquad$ 16. $x.\log x$
17. $x^n.\log x$ $\qquad$ 18. $x^n.(\log x)^2$
19. $\dfrac{x}{1-\cos x}$ $\qquad$ 20. $\dfrac{x}{1+\cos x}$
21. $\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ $\qquad$ 22. $\dfrac{\log(\log x)}{x}$

23. $\sec^3 x$. [ संकेत $\sec^3 x = \sec^2 x \sec x$ ]

24. $\dfrac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$  25. $\dfrac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

26. $\dfrac{x e^x}{(x+1)^2}$

### 9.3. $e^{ax} \cos bx$ का समाकल

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$= e^{ax} \int \cos bx \, dx - \int \left\{ \frac{d\, e^{ax}}{dx} \int \cos bx \, dx \right\} dx$$

$$= e^{ax} \frac{\sin bx}{b} - \int a\, e^{ax} \frac{\sin bx}{b} \, dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{b} \sin bx - \frac{a}{b}\left[ e^{ax} \int \sin bx \, dx - \int \left[ \frac{d}{dx} e^{ax} \int \sin bx \, dx \right] dx \right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{b} \sin bx - \frac{a}{b}\left[ e^{ax} \frac{(-\cos bx)}{b} - \int e^{ax} \frac{(-\cos bx)}{b} dx \right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{b} \sin bx + \frac{ae^{ax}}{b^2} \cos bx - \int \frac{a^2}{b^2} e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$= e^{ax} \frac{\sin bx}{b} + a \frac{e^{ax} \cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} I$$

$$I\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{e^{ax} [b \sin bx + a \cos bx]}{b^2}$$

$$I (a^2 + b^2) = e^{ax} [b \sin bx + a \cos bx]$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [b \sin bx + a \cos bx]$$

इस परिणाम को और भी सुविधापूर्ण रूप में लिखने के लिए

$a = r \cos \alpha$ और $b = r \sin \alpha$ रखो

जबकि $r = \sqrt{a^2+b^2}$ और $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

$$I = \frac{e^{ax}}{r^2} [r \cos \alpha \cos bx + \sin \alpha \sin bx]$$

$$=\frac{e^{ax}}{r}\cos(bx-\alpha)$$

$$=\frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(bx-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

इसी तरह से

$$e^{ax}\sin bx=\frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}[a\sin bx-b\cos bx]$$

$$=\frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx-\alpha)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(bx-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

### 9.4. $\sqrt{a^2+x^2}$ का समाकलन

इस फलन का समाकलन निकालने के लिए एक को दूसरा फलन और $\sqrt{a^2+x^2}$ को पहला फलन लेते हैं।

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2+x^2}\,.\,1\,dx$$

$$=\sqrt{a^2+x^2}\,.\,x-\int\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}}.\,x\,dx$$

$$=\sqrt{a^2+x^2}\,.\,x-\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

$$=\sqrt{a^2+x^2}\,.\,x-\int\frac{x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx+a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

$$=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx+a^2\log(x^2+\sqrt{a^2+x^2})$$

$$I=x\sqrt{a^2+x^2}-I+a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

$$2I=x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

$$I=\frac{1}{2}[x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})]$$

### 9.5. $\sqrt{a^2-x^2}$ का समाकलन

$\sqrt{a^2-x^2}$ को पहला फलन तथा एक को दूसरा फलन लेने पर

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-x^2}\,.\,1.\,dx$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.\int 1.\,dx-\int\left\{\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2}\int 1.\,dx\right\}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\, x\, dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$$

$$I = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx + a^2 \log\{x+\sqrt{a^2-x^2}\}$$

$$I = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2 \log(x+\sqrt{a^2-x^2})$$

$$2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \log(x+\sqrt{a^2-x^2})$$

$$I = \tfrac{1}{2}\{x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \log(x+\sqrt{a^2-x^2})\}$$

## 9.6. उदाहरणमाला 23

1. $\int e^x \sin^2 x\, dx$ को हल करो ।

$$I = \tfrac{1}{2}\int e^x . 2\sin^2 x\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int e^x (1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int e^x dx - \tfrac{1}{2}\int e^x \cos 2x\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} e^x - \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+4}}\, e^x \cos(2x - \tan^{-1}(2)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} e^x - \frac{1}{2\sqrt{5}}\, e^x \cos[2x - \tan^{-1}(2)]$$

2. $\int \cos\left(b \log \frac{x}{a}\right) dx$ का मान ज्ञात करो ।

$\log \frac{x}{a} = t$ रखने पर

$$\frac{x}{a} = e^t$$

$$dx = a\, e^t\, dt$$

$$I = \int \cos\left(b \log \frac{x}{a}\right) dx$$

$$= \int \cos bt .\, a\, e^t\, dt$$

$$= a\int e^t . \cos bt\, dt$$

$$= a\frac{e^t}{\sqrt{1+b^2}} \cos[bt - \tan^{-1}(b)]$$

3. $\int e^x (\log \sin x + \cot x)\, dx$ को हल करो ।

$$I = \int e^x . \log \sin x\, dx + \int e^x \cot x\, dx$$

$$= \int e^x \log \sin x \, dx + \left[ e^x \int \cot x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} e^x \int \cot x \, dx \right\} dx \right.$$

$$= \int e^x . \log \sin x \, dx + e^x . \log \sin x - \int e^x . \log \sin x \, dx$$

$$I = e^x . \log \sin x.$$

## 9.7. निश्चित समाकल:-

यदि $\int f(x) \, dx = F(x)$ हो तो

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

समाकल $\int_a^b f(x) \, dx$ को निश्चित समाकल कहते हैं ।

## 9.8. उदाहरणमाला 24

1. $\int_0^1 x^{10} \, dx$ का मान करो ।

$$I = \int_0^1 x^{10} \, dx = \left[ \frac{x^{11}}{11} \right]_0^1$$

$$= \left[ \frac{1}{11} - \frac{0}{11} \right] = \frac{1}{11}$$

2. $\int_0^\infty \frac{dx}{9+x^2} dx$ का मान निकालो ।

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x}{3} \right) \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \tan^{-1} \frac{\infty}{3} - \tan^{-1} \frac{0}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{3} [\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} 0]$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \frac{\pi}{2} - 0 \right]$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

## प्रश्नावली 26

निम्नलिखित फलनों के समाकल निकालो

1. $e^{-2x} \cos 5x$
2. $e^x \sin x \cos x$
3. $\frac{\sin(\log x)}{x}$
4. $\sin^2 x$

5. $e^{3x} \cos 4x$
6. $e^{2x} \sec 2x. (1+\tan 2x)$
7. $\dfrac{e^{3x}(1+\sin 2x)}{(1+\cos 2x)}$
8. $\dfrac{x-\sin x}{1-\cos x}$
9. $\int_0^1 x^4\, dx$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)\, dx$
11. $\int_0^1 \dfrac{6\, dx}{1+x^2}$
12. $\int_{-1}^{2} \dfrac{dx}{2x+3}$
13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) dx$
14. $\int_0^a x^2 \sin x^3\, dx$
15. $\int_0^2 \dfrac{(1+\log x)^4}{x} dx$
16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{3+4\sin x}\, dx$
17. $\int x^2 \sqrt{x^6-1}\, dx$
18. $\int e^x (\sin x+\cos x\ dx$
19. $\int (\sin x) \cos x. \sqrt{\cos^2 x-1}\, dx$
20. $\int e^x (1+\sin x) dx$
21. $\int \dfrac{x e^x}{(x+1)^2} dx$
22. $\int \sec^2 x. \tan x \sqrt{\sec^2 x+1}\, dx$
23. $\int (x+1) \sqrt{x^2+1}\, dx$
24. $\int \sin x \sqrt{\cos^2 x-4}\, dx$
25. $\int \sec^2 x. \sqrt{\tan^2 x-1}$
26. $\int e^{x\sqrt{3}} \cos (2x+\alpha)\, dx$
27. यदि $u=\int e^{ax} \cos bx\, dx$, और $v=\int e^{ax} \sin bx\, dx$

तो सिद्ध करो कि

$$\tan^{-1} \frac{v}{u} + \tan^{-1} \frac{b}{a} = e^{2ax}$$

और $$(a^2+b^2)(u^2+v^2) = e^{2xa}$$

# अध्याय 10

## आंशिक भिन्न द्वारा समाकल
## (Integral by partial fraction)

### 10.1. भिन्न

$$\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_n}$$

जिसमें $a_0, a_1, a_2..a_n; b_1, b_2, b_3..b_n$ अचर है, को परिमेय बीजीय भिन्न (Rational Algebraic fraction) कहते हैं। ऐसी भिन्नों का समाकल निकालने के लिए हम भिन्नों को आंशिक भिन्न में लिखते हैं, जिसमें प्रत्येक भिन्न वास्तविक भिन्न (Proper fraction) होती है।

वास्तविक भिन्न वह है जिसमें अंश की घात, हर की घात से कम हो।

### 10.2. आंशिक भिन्न

भिन्न को आंशिक भिन्न के रूप में लिखने के लिए चार तरह की भिन्नें मिलती हैं।

1. अपुनरावर्ती एक घाती खंड [ Non-Repeated linear factors ]
2. पुनरावर्ती एक घाती खंड [ Repeated linear factors ]
3. अपुनरावर्ती द्विघाती खंड [ Non-Repeated Quadric factors ]
4. पुनरावर्ती द्विघाती खंड [ Repeated linear factors ]

### 10.3. अपुनरावर्ती एक घाती खंड (Non-Repeated linear factors)

माना कि $\frac{\psi(x)}{f(x)}$ कोई भिन्न है, जिसके हर में अपुनरावर्ती एक घाती खंड है। माना कि वे $(x-a)$ और $(x-b)$ है। अतः माना कि

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

पूरे को $(x-a)$ से गुणा करने के पश्चात $x=a$ रखने पर

$$\frac{(a-b)\,\psi(a)}{f_1(a)} = B \quad ,$$

जबकि $f(x) = (x - a)\, f_1(x)$.

पुन: $(x-b)$ से समीकरण (i) को गुणा करने के पश्चात $x=b$ रखने पर

$$\frac{(b-a)\,\psi(b)}{f_1(b)} = A$$

जबकि $f(x) = (x - b)\, f_1(x)$

अत: आंशिक खंड

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{(b-a)\psi(b)}{f_2(b)} \cdot \frac{1}{(x-a)} + \frac{(a-b)\,\psi(a)}{f_1(a)}\,\frac{1}{(x-b)}$$

होगा । जिसमें $\dfrac{\psi(a)}{f_1(a)}$ और $\dfrac{\psi(b)}{f_2(b)}$ x के फलन न होने के कारण अचर हैं ।

अत: हम इसका समाकल आसानी से निकाल सकते हैं ।

## 10.3. उदाहरणमाला 25

$$\int \frac{x^3 + x + 2}{(x-2)\,(x-1)}\, dx \text{ को हल करो ।}$$

क्यों कि $\dfrac{x^2 + x + 2}{(x-2)\,(x-1)}$ एक वास्तविक भिन्न नहीं है, अत: $(x-2)$ $(x-1)$ से अंश का भाग देने पर

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x-2)\,(x-1)} = 1 + \frac{4x}{(x-2)\,(x-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

अब माना कि

$$\frac{4x}{(x-2)\,(x-1)} \equiv \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{x-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(ii) को $(x-2)$ से गुणा करें तो

$$\frac{4x}{x-1} \equiv A + \frac{(x-2)\,A}{x-1}$$

अब $x = 2$ रखने पर

$$\frac{8}{2-1} = A \qquad , A = 8$$

पुन: (ii) को $(x-1)$ से गुणा करें तो

$$\frac{4x}{x-2} \equiv \frac{A\,(x-1)}{x-2} + B$$

अब $x = 1$ रखने पर

$$\frac{4}{1-2} = B \qquad , B = -4$$

A और B का मान (ii) में रखने के बाद समीकरण (i) में उपयोग करने पर

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{(x-2)(x-1)} dx = \int \left\{ 1 + \frac{8}{x-2} - \frac{4}{x-1} \right\} dx$$

$$= \int 1.dx + 8\int \frac{1}{x-2} dx - 4\int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= x + 8 \log(x-2) - 4\log(x-1)$$

## 10.4. पुनरावर्ती एक घाती खंड (Repeated Linear factors)

माना कि भिन्न $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ में, हर $\psi(x)$ में पुनरावर्ती एक घाती खंड हैं।

माना कि $(x-a)^2$ और $(x-b)$ हैं। अत:

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$$

पूरे में $(x-a)^2 (x-b)$ से गुणा करने पर

$$f(x) \equiv A(x-a)(x-b) + B(x-b) + C(x-a)^2$$

दोनों पक्षों के $x^2$, $x$ के गुणांक और अचर बराबर होना चाहिए। इस तरह से हमें तीन समीकरण मिलते हैं। ये समीकरण A, B, C का मान निकालने के लिए काफी हैं। अत: पुनरावर्ती एक घाती खंड को आंशिक भिन्न में सरलता से लिख सकते हैं।

## 10.5. उदाहरणमाला 26

1. $\int \frac{x}{(x-1)^2 (x+2)}$ को हल करो।

$$\frac{x}{(x-1)^2 (x+2)} \equiv \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)} \cdots\cdots\cdots (i)$$

$$x \equiv A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x+2)^2 \cdots\cdots$$

$x^2$, $x$ के गुणांक तथा अचर दोनों पक्षों के समान होना चाहिए, इसलिए

$$A + C = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (ii)$$

$$A + B - 2C = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (iii)$$

$$-2A + 2B + C = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (iv)$$

समीकरण (ii), (iii) और (iv) से

$$A = \frac{2}{9}, \ B = \frac{1}{3}, \ C = \frac{-2}{9}$$

अतः

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \int \frac{2}{9(x-1)}dx + \int \frac{dx}{3(x-1)^2} - \int \frac{2}{9}\frac{dx}{(x+2)}$$

$$= \frac{2}{9}\log(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^{-1} - \frac{2}{9}\log(x+2)$$

$$= \frac{2}{9}\log\frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{3}(x-1)^{-1}$$

**10.6.** पुनरावर्ती द्विघाती तथा अपुनरावर्ती द्विघाती खंड निकालना तथा ऐसे फलनों का समाकल करना इस पुस्तक की सीमा से बाहर है अतः इनकी चर्चा यहाँ नहीं करेंगे ।

## प्रश्नावली 27

निम्नलिखित फलनों का समाकलन निकालो ।

1. $\frac{x}{(x-8)(x-5)}$

2. $\frac{1}{x^2-3x+2}$ (विक्रम 65)

3. $\frac{1}{16-x^2}$

4. $\frac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}$

5. $\frac{x}{(x-1)^2(x+5)}$

6. $\frac{1}{(x^2-4)}$

7. $\frac{1}{(x-7)(x-6)}$

8. $\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

9. $\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$

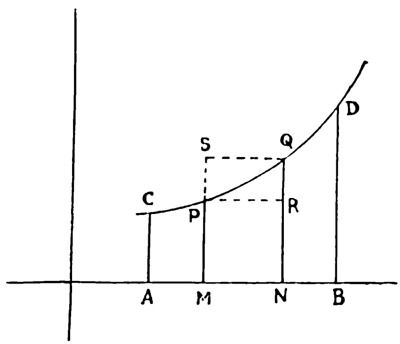
10. $\frac{1}{(x-1)^2(x-2)(x-4)}$

# अध्याय 11

## वक्रों का क्षेत्रफल (Areas of curves)

### 11.1. वक्रों का क्षेत्रफल जबकि वक्र का समीकरण कार्तीय निर्देशांक (Cartesian Co-ordinate) में हो ।

माना कि C D वक्र का समीकरण $y=f(x)$ है, जब कि (a, b) प्रभाव क्षेत्र में, f (x) x का सतत फलन (Continuous Function) है ।




माना कि जैसे जैसे x, a से b की ओर बढ़ता है, y भी बढ़ता है । माना कि $CA = a$ और $BD = b$ है ।

वक्र C D पर कोई बिन्दु P (x, y) लिया जिसका कोटि (ordinate) PM है । एक विन्दु Q, P के बहुत ही समीप लिया जिसका कोटि QN और निर्देशांक (Co-ordinates) $(x+h, y+k)$ हैं । जैसे ही $h \to o$ और $k \to o$ होता है Q और P एक ही विन्दु हो जाते हैं ।

क्षेत्रफल AMPc, x का कोई फलन होगा, माना कि $\phi(x)$ है । कोटि PM को विन्दु S तक बढ़ाया, तथा Q और P से क्रमश: MS और NQ पर लम्ब डाले । इसलिए ANQC का क्षेत्रफल $= \phi(x+h)$ होगा ।
अत:

$$\frac{\phi(x+h)-\psi(x)}{h} = \frac{\text{ANQC का क्षेत्रफल} - \text{AMPC का क्षेत्रफल}}{h}$$

$$= \frac{\text{MNQP का क्षेत्रफल}}{h} \cdots\cdots\cdots (i)$$

MNQP का क्षेत्रफल $= y\,h$,

और MNQS का क्षेत्रफल $= (y+k)\,h$ होगा ।

स्वयं सिद्ध को मानते हुए कि

MNQP का क्षेत्रफल, क्षेत्रफल MNRP और क्षेत्रफल MNQS के बीच में होगा समीकरण (i) से

$\frac{\phi(x + h) - d(x)}{h}$ का मान (y + k) और y के बीच में होगा ।

सीमा (Limit) लेते हुए

$$\lim_{h \to o} \frac{\phi(x + h) - d(x)}{h} = y$$

और

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = y \text{ होगा ।} \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

माना कि f(x) का समाकल F(x) ज्ञात है, इसलिए

$$\phi(x) = F(x) + c \ldots\ldots (iii)$$

जबकि c कोई अचर है । c का मान निकालने के लिए x = a समीकरण (iii) में रखने पर

$$\phi(a) = F(a) + c$$

परन्तु $x = a$ पर $\phi(a) = 0$ होगा, क्योंकि $x = a$ पर विन्दु M, A के ऊपर आ जाता है, अतः AMPc का क्षेत्रफल शून्य होगा । अतः

$$F(a) + c = 0$$

और $F(a) = - c$ का मान (iii) में रखने पर

$$\phi(x) = F(x) - F(a)$$

अतः क्षेत्रफल $ABCD = \phi(b) = F(b) - F(a)$

$$= \int_a^b f(x)\, dx.$$

परन्तु $y = f(x)$ है, इसलिए

क्षेत्रफल $ABCD = \int_a^b y\, dx$ होगा ।

## 11.2. किसी ठोस को दी हुई अक्ष के चारों तरफ घुमाने से बने आकार का आयतन तथा सतह ।

यहाँ इस अनुच्छेद (Article) में किसी ठोस को किसी दी हुई अक्ष के चारों ओर घुमाने से बनने वाली आकार का आयतन तथा सतह निकालने के लिए केवल सूत्रों को ही दिया जाता है, क्योंकि उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है । विद्यार्थी केवल सूत्रों का उपयोग करके प्रश्नों का हल कर सकते हैं ।

माना कि वक्र का समीकरण $y=f(x)$ है ।

(1) ठोस को x- अक्ष के चारों ओर घुमाने से बनी आकार, जो कि $x = a$ और $x = b$ के बीच में है, का आयतन और सतह क्रमश:

$$\text{(i)} \quad \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

और

$$\text{(ii)} \quad \int_a^b 2\pi \, y ds \quad \text{हैं ।}$$

(2) ठोस को y – अक्ष के चारों ओर घुमाने से बनी आकार, जो कि $y = a$ और $y = b$ के बीच में है, का आयतन और सतह क्रमश:

$$\text{(iii)} \quad \int_a^b \pi x^2 \, dy$$

और

$$\text{(iv)} \quad \int_a^\pi 2\pi x ds \quad \text{हैं ।}$$

## उदाहरणमाला 27

1. x–अक्ष, कोटि $x = a$, $x = b$ और वक्र $y = e^x$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालो ।

$$\text{सूत्र द्वारा वक्र का क्षेत्रफल} = \int_a^b y \, dx \text{ होता है,}$$

यहाँ $y = e^x$ है इसलिए

$$\text{वक्र का क्षेत्रफल} = \int_a^b e^x \, dx$$

$$= \Big[ e^x \Big]_a^b$$

$$= [ e^b - e^a ] \text{ होगा ।}$$

2. सिद्ध करो कि x – अक्ष और वक्र $a^2y = x^2(x - a)$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{a^2}{12}$ है।

वक्र $a^2y = x^2(x - a)$, x – अक्ष को $x = o$ और $x = a$ पर काटती है। अतः क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_{o}^{a} y\, dx$$

$$= \int_{o}^{a} \frac{x^2(x - a)}{a^2} dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{ax^3}{3}\right]_o^a$$

$$= -\frac{a^2}{12}$$

अतः क्षेत्रफल $= \frac{a^2}{12}$ होगा, चूँकि क्षेत्रफल धनात्मक राशि होती है।

3. सिद्ध करो कि अर्धव्यास r वाले गोले का आयतन $\frac{4}{3}\pi r^3$ होता है।

माना कि r अर्धव्यास वाले वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ है। वृत्त को x – अक्ष के चारों ओर घुमाने से गोला मिलता है। अतः सूत्र का उपयोग करने पर अर्धगोले का आयतन

$$= \int_{o}^{r} \pi y^2\, dx$$

y का मान रखने पर

$$= \pi \int_{o}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

$$= \pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_o^r$$

$$= \pi\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right]$$

$$= \frac{2\pi r^3}{3}$$

अतः पूर्ण गोले का आयतन $= \frac{4\pi r^3}{3}$ होगा।

## प्रश्नावली 28

सिद्ध करो कि

1. वक्र $y = \log x$, कोटि $x = a, x = b\,(b > a > 1)$ और $x$ – अक्ष के के बीच बना हुआ क्षेत्र का क्षेफफल $\left[b \log\left(\frac{b}{e}\right) - a \log\left(\frac{a}{e}\right)\right]$ है।

2. वक्र $y = \sin^2 x$, $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ और $x$ – अक्ष के बीच बना हुआ क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{\pi}{4}$ है।

3. दीर्घवृत (Ellips) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का क्षेत्रफल $\pi ab$ होता है।

4. वक्र $ay^2 = x^2(a - x)$ द्वारा बना हुआ पाशकुंडली (Loop) का क्षेत्रफल $\frac{8}{15} a^2$ है।

5. दीर्घवृत $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को $x$ – अक्ष के चरों ओर घुमाने से बना हुआ ठोस का आयतन $\frac{4}{3}\pi ab^2$ होता है।

6. एक अर्धव्यास $a$ वाले गोले से $h$ ऊँचाई की टोपी काटी जाती है तो सिद्ध करो कि इस टोपी का आयतन $\pi h^2 (a - \frac{1}{3} h)$ होगा।

7. सिद्ध करो कि $h$ दूरी वाले दो समानान्तर समतल द्वारा काटा गया वृत्तीय खंड का सतह $2\pi ah$ होता है जब कि गोले का अर्धव्यास $a$ है।

# उत्तरमाला

## प्रश्नावली 1

(2) 20; (3) 1, 0, $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; (4) o, $\infty$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}$; (11) 3.

## प्रश्नावली 2

(1) $-1$, (2) 1, (3) $-3$, (4) o, (5) $m\,a^{m-1}$

(6) $\frac{a}{b}$ (7) $\frac{\sin b}{b}$ (8) $\frac{-1}{2}$ (9) 2.

## प्रश्नावली 3

(1) $3x^2$, $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(2) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{10}x^{-7/10}$

(3) o, $4x$, $-42x^{-3}$, $x^{-\frac{3}{4}}$

(4) $3x^2$, $1-\frac{1}{x^2}$, $10x-\frac{7}{x^2}$

(5) $e^x+7$, $3\,e^x+10x^9$

(6) $\frac{10}{x}$, $\frac{5}{x}$, $\frac{10.a}{x}$

(7) $3e^x+\frac{1}{x}+2\,4x^2$

(8) $1-\frac{1}{x^2}$

(9) $2a\,x+b+\frac{100}{x}+5e^x$

(10) $1+x+\frac{x^2}{|2}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\ldots.$

(11) $\frac{6}{x}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(12) $\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

(13) $\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}-2e^{2x}$

(14) $n\,x^{n-1}+\frac{n}{x}\log_a e$.

## प्रश्नावली 4

(1) $12x^2+3\cos x$ (2) $m\,a^m\,x^{m-1} - 5\sin x$

(3) $-\sin x + \dfrac{10}{x} + e^x$ (4) $a\cos x + \dfrac{b}{x}$

(5) $\sqrt{2}\cos x + 10x^9$ (6) $15a\,x^{14} + 15e^x$

## प्रश्नावली 5

(1) $e^x\cos x + e^x\sin x$ (2) $\dfrac{\cos x}{x} - \sin x.\log x$

(3) $\dfrac{e^x.\log_a e}{x} + e^x.\log_a x$ (4) $-e^x.\sin x + \cos x\;e^x$

(5) $8x^{-\frac{1}{2}}\log_e(e\sqrt{x})$ (6) $3x^2\log_e x + x^2$

(7) $\frac{1}{2}e^x x^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{x}\,e^x$ (8) $\dfrac{\log_a x}{x} + \dfrac{\log x}{x}\log_a e$

(9) $6x^2 e^x + 2x^3 e^x + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\log_e x + 3x^{-\frac{1}{2}}$

(10) $\dfrac{\log_a e}{x} + \dfrac{a}{x}$ (11) $x^9\log_e x\,e$

(12) $(x^3+x^4)(-\sin x+e^x)+(3x^2+4x^3)(\cos x+e^x)$

(13) $\sin x + x\cos x.\log x + \sin x.\log x$

(14) $2\cos 2x$ या $2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

## प्रश्नावली 6

(1) $\dfrac{-\log x.\sin x - \cos x\;x^{-1}}{(\log x)^2}$

(2) $\dfrac{2a\,x\,(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)(a\,x^2+b)}{(\sin x+\cos x)^2}$

(3) $\dfrac{n\,x^{n-1}\log x - x^{n-1}}{(\log x)^n}$

(4) $\dfrac{3(x^2+4x+1)}{(2x^2+3x+4)^2}$, (5) $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

(6) $\dfrac{\log_e xe\ (e^x+\cos x)-x^{-1}\ (e^x+\sin x)}{(\log_e xe)^2}$

(7) $\dfrac{2x\ \log x - \dfrac{(x^2-1)}{x}}{(\log x)^2}$ (8) $\dfrac{e^x\ (x-1)}{(x+1)}$

(9) $\dfrac{(\log x-x^n)\ (e^x-\sin x)-(e^x+\cos x)\left(\dfrac{1}{x}-nx^{n-1}\right)}{(\log x-x^n)^2}$

(10) $\dfrac{x^2}{(x \sin x+\cos x)^2}$ (11) $2 \tan\dfrac{x}{2}$

(12) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}\ (\sqrt{a}-\sqrt{x}\ )^2}$ (13) $-\operatorname{cosec} x.\ \cot x$

(14) $x\ [2-x \sin x]$ (15) $\dfrac{e^x\ [3x^2 \sin x+x^3 \cos x]-e^x.\ x^3 \sin x}{e^{2x}}$

(15) (ii) $\dfrac{2 \cos^2 x\ \sin x-\sin^3 x}{\cos^2 x}$

(15) (iii) $\dfrac{3x^2\ e^x\ \sin x-x^3\ [e^x\ \sin x+e^x \cos x]}{(e^x\ \sin x)^2}$

## प्रश्नावली 7

(1) $\dfrac{(5x+7)\ \sec^2 x-5\ (3+\tan x)}{(5x+7)^2}$

(2) $\dfrac{\log_a x.\ nx^{n-1}-x^{n-1}\ \log_a e}{(\log_a x)^2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}\ (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}$

(4) $\dfrac{[\cot x-x^n][e^x+x^2\sec^2x+2x\tan x]-[e^x+x^2\tan x]\ [-\operatorname{cosec}^2x-nx^{n-1}]}{(\cot\ x-x^n)^2}$

(5) $\{[\sec^2x-\operatorname{cosec}^2x]\ \log x-\dfrac{1}{x}(\tan x+\cot x)\}/(\log x)^2$

(6) $\dfrac{(e^x+\sec^2x)(\cot x-x^n)+(\operatorname{cosec}^2x+nx^{n-1})(e^x+\tan x)}{(\cot x-x^n)^2}$

(8) (i) $-\operatorname{cosec} x\ \cot x-14x.$

(ii) see $x \tan x - \cos x \log x - \dfrac{\sin x}{x}$

(9) (i) $-\operatorname{cosec} x . \cot x . \log x+\frac{\operatorname{cosec} x}{x}$

(ii) $e^x \sec x+e^x \sec^2 x . \tan x$

(10) $\sin x\left[\frac{e^x}{x} \log_a e+e^x . \log_a x\right]+\cos x \log_a x \; e^x$

## प्रश्नावली 8

(1) $n x^{n-1} \cos x^n, n x^{n-1} \sec^2 x^n, \frac{n}{x}$ $n x^{n-1} e^{x^n}, n x^{n-1} a^{x^n} \log_e a$

(2) $3\left(e^x\right)^3 .\ 3 \tan^2 x . \sec^2 x, 3\left(a^x\right)^3 . \log_e a$

$\frac{7(\log x)^6}{x}, 3 \sin^2 x . \cos x .$

(3) $7 \sec^2 7 x, \frac{1}{x}, \frac{1}{x}, 7 e^{7 x}, 7 a^{7 x} . \log_e a$

(4) $\frac{a}{a x+b}, c \cos (c x+d), 3 e^{3 x+2},(6+\cos x) e^{6 x+\sin x}$

(5) $\frac{1}{x \log x}, \cot x, 1, \frac{5}{x}$

(6) $\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}, \frac{1}{2}\left(a^x\right)^{\frac{1}{2}} \log_e a, \frac{-1}{2}(\cot x)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cosec}^2 x$

$\frac{3}{2} \frac{\sqrt{(\log x)}}{x}$

(7) $-\operatorname{cosec}^2 x, \frac{-1}{x(\log x)^2}, n x^{n-1}\left(x^n+a^n\right)^{-2}$

$\frac{1}{2}(x+a)^{-\frac{1}{2}}, a^{-x} \log_e a$

(8) $-n x^{n-1} e^{-x^n},-(\sec x)^{-1} \tan x,-5(\sin x)^{-6} \cos x$

$-2 . \frac{\left(\log_a x\right)^{-3}}{x} \log_e a$

(9) $\frac{1}{2} e^{\sqrt{\sin x}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}, \frac{-1}{2} e^{\sqrt{\cot x}}(\cot x)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cosec}^2 x$.

(10) $\frac{1}{2 \sqrt{(x-a)(x-b)}}, \sec x$

(11) $\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$ , $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(12) $-2 \tan x$

(13) $\frac{\sqrt{1+x^2}\,(-2x)-(1-x^2)\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}x}{(1+x^2)}$

(14) ( i ) $e^{ax}\,[a \cos b\,x - b \sin bx]$

( ii ) $\cos\sqrt{x}\,\cot x + \log \sin x.\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(iii) $4 \cos^3 x\,(-\sin x) \cos x^4 + 4x^3 \cos x^4.\ \sin x^4.\ \cos^4 x.$

(iv) $\cos x\, e^{\sin x} \sin e^x. + e^{\sin x} \cos e^x.\ e^x$

(v) $m\,(x+a)^{m-1}\,(x+b)^n + n(x+b)^{n-1}\,(x+a)^m$

(vi) $p\,(x+a)^{p-1}\,(x^m+b)^q + q\,(x^m+b)^{q-1}\,mx^{m-1}\,(x+a)^p$

15. (i) $[-(a\,x+b)\operatorname{cosec}^2 x^3.\ 3x^2 - a \cot x^3] \div (a\,x+b)^2$

(ii) $\frac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}$

(iii) $\left[-\tan(\log x).\ \tan x - \frac{\log\cos x.\ \sec^2(\log x)}{x}\right] \div$ $(\tan \log x)^2$

(iv) $[\sin x^n.\ e^{\sin x}.\ \cos x - e^{\sin x}.\ n\,x^{n-1} \cos x^n] \div (\sin x^n)^2$

(v) $\frac{3x^2\,(a\,x^2+b)\,\sec^2 x^3 - 2a\,x\,\tan x^3}{(a\,x^2+b)^2}$

(16) (i) $\frac{\sin x^n.[e^{\sin x} + e^{\sin x}.\ \sec x.\ \tan x] - \sec x.\ e^{\sin x}\ nx^{n-1}.\ \cos x^n}{(\sin x^n)^2}$

(ii) $\frac{1}{2}[\sin\sqrt{x}\cdot(\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cos x - \sqrt{\sin x}\cdot \cos\sqrt{x}.\ x^{-\frac{1}{2}}] \div (\sin\sqrt{x})^2$

(17) (i) $[\cos^2 x.\ \operatorname{cosec} x - \sin x.\ \log \sin x]$

(ii) $(x \sec^2 x + \tan x)$

(iii) $\frac{a \cot x}{a\,x+b} - \operatorname{cosec}^2 x.\ \log(ax+b)$

(18) $8x \cos x^2 + \frac{5 \cos x}{5 \sin x + 6}$

(19) $\dfrac{(1+\cos^2 x)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\; 2\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2}$

(20) $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

(21) (i) $n^3\, x^{n-1}\, \sin^{n-1}(nx^n)\cos(nx^n)$

(ii) $n^2\, \{\log(\sin^n x)\}^{n-1}.\ \cot x,$

(iii) $\dfrac{-n\tan^{n-1}(\log\cot x).\ \operatorname{cosec}^2 x}{\cot x}$

(22) (i) $e^x\, f'(e^x)$ (ii) $-f'(\sin x).\ \cos x.$

(iii) $\frac{1}{2} f'(x).\ \{f(x)\}^{-\frac{1}{2}}$ (iv) $n\,[f(ax+b)]^{n-1}\, f'(ax+b)$

(v) $n\,a\,x^{n-1}\, f'(ax^n+b)$ (vi) $\sec^2 x.\ f'(\tan x)$

(23) $\dfrac{n\,a\,x^{n-1}+(n-1)\,a_1 x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+a_{n-1}}{a\,x^n+a_1\,x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+a_{n-1}\,x+a_n}$

## प्रश्नावली 9

(1) (i) $\dfrac{4x}{\sqrt{x^4-1}.\ \sec^{-1}(x^4)}$ (ii) $a\log_e(xe)$

(2) (i) $\dfrac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (ii) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\;(1+x)}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

(3) (i) $\dfrac{-1}{\sin x\sqrt{\sin^2 x-\cos^2 x}}$ (ii) $\dfrac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$

(iii) $\dfrac{-1}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$ (iv) $\dfrac{2}{e^{(2x+1)}+e^{-(2x+1)}}$

(v) $\dfrac{(\log\sin^{-1}x)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-x^2}}$ (vi) $\dfrac{e^{\sin^{-1}(\log x)}}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}$

(4) $\dfrac{-2}{(1+x^2)}$, $\dfrac{1-x^2}{x^4+3x^2+1}$, $\dfrac{\operatorname{cosec}^2(\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$\dfrac{e^x.\ \cos e^x}{1+\sin^2(e^x)}$

(5) (i) $x^x.\ \log_e(x\,e)$ ; (ii) $x^{\sin x}\left[\cos x\,\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right]$

(iii) $x^{\cot bx}\left[-b \operatorname{cosec}^2 bx. \log x + \frac{\cot bx}{x}\right]$

(iv) $5x^{5x^3+2} \log_e (x^3 e)$ ,

(v) $x^{\cos ax}\left[\frac{\cos ax}{x} - a \sin ax. \log x\right]$

(6) (i) $(\sin x)^x [\log \sin x + x \cot x]$,

(ii) $(\tan x)^{\log x}\left[\frac{\log \tan x}{x} + (\sin x \cot x)^{-1} \log x\right]$

(iii) $(\sin^{-1} x)^{\log x}\left[\frac{\sin^{-1} x}{x} + \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(iv) $e^{x^{x}} [x^x]. \log_e (x e)$.

(7) (i) $(1+x)^x [\log (1+x)+(1+x)^{-1}]+x^{1+\frac{1}{x}}$
$\left[\frac{x+1-\log x}{x^2}\right]$

(ii) $(\cot x)^{\sin x} [\cos x \log \cot x - \sec x] + (\tan x)^{\cos x}$
$[\operatorname{cosec} x - \sin x. \log \tan x]$

(iii) $(\tan x)^{\log x}\left[\frac{\log \tan x}{x} + \frac{\sec x}{\sin x}. \log x\right]$

(8) $(\sin x)^x [x \cot x + \log \sin x] + 2x^{\log x} \frac{\log x}{x}$

(9) $(\sin x)^{\cos x} [\cos^2 x . \operatorname{cosec} x - \sin x . \log \sin x]$

$+ (\cos x)^{\sin x}\left[\cos x . \log x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$

(10) $x^{x^{x}} \log x^{x}\left[\log_e(xe) + \frac{1}{x}\right]$

(11) $\left[\frac{2}{(x-1)} + \frac{3}{(x+2)} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x \log x}\right]$
$(x-1)^2 (x+2)^3 (x+4) \log x$

(12) $\left[\sec x.\ \operatorname{cosec} x + \log_a + \dfrac{1}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}\right] \tan x.\ a^x.\ \sin^{-1}x$

(13) $\left[\log 2 - \sec x.\ \operatorname{cosec} x - \dfrac{1}{2x}\right]\dfrac{2^x.\cot x}{\sqrt{x}}$

(14) $\left[\dfrac{-1}{1-2x} + \cos x.\ \operatorname{cosec} x + \sec x.\ \operatorname{cosec} x - 5\cot 5x - \log a\right] \times \dfrac{\sqrt{1-2x}\ \sin x\ \tan}{\sin 5x.\ a^x}$

(15) $\left[\dfrac{-1}{a-x} - \dfrac{1}{b-x} - \dfrac{1}{c-x} + 1 + \cot x - \tan x\right] \dfrac{(a-x)(b-x)(c-x)}{e^x \sin x.\cos x}$

## प्रश्नावली 10

(1) $-\dfrac{x^4+y}{y^4+x}$

(2) $\dfrac{-(2x^{-3/5} + 3x^{-4/5}x^{1/5})}{3x^{1/5}y^{-4/5} + 2y^{-3/5}}$

(3) $\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

(4) $\dfrac{-\tan y}{x\sec^2 y + \cot y}$

(5) $\dfrac{-(yx^{y-1} + y^x \log y)}{x^y \log x + xy^{x-1}}$

(6) $\dfrac{-(y + x\ y \log y)}{x(x + y\log x)}$

(7) $\dfrac{(1-x^2)^{-1/2} - e^x.\log y}{\dfrac{e^x}{y} - (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}}$

(8) $\dfrac{\sin y.\ \tan x\,(\cos x)^{\sin y} - \cot x \cos y\ (\sin x)^{\cos y}}{(\cos x)^{\sin y} \cos y \log\cos x - (\sin x)^{\cos y} \sin y\ \log \sin x}$

(9) $\dfrac{(\sin x)^{\cos y} \cos y.\cot x + (\cos y)^{\sin x} \sin y\ \tan x}{1 + (\sin x)^{\cos y} \sin y.\log\sin x - (\cos x)^{\sin y} \cos y\ \log\cos x}$

(10) $\cot \dfrac{t}{2}$

(11) $\dfrac{\cot t\sqrt{1-t^2} - 2}{3t^2(\cos t^3 - \sin t^3)\sqrt{1-t^2}}$

(12) $\tan t$ (13) $\dfrac{t\,(e^t - \sin t)}{1 + t\cos t}$

## प्रश्नावली 11

(1) (i) $\dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) (i) $\dfrac{3}{1+x^2}$ (ii) $\dfrac{2}{1+x^2}$

(iii) $\dfrac{2}{4+x^2}$ (iv) $\dfrac{-1}{1+x^2}$

(3) (i) $\dfrac{3a}{x^2+a^2}$ (ii) $\dfrac{a}{(a^2+x^2)+\dfrac{2a}{a^2+4x^2}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(iv) $\dfrac{-2x}{1+x^4}$

(4) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$ (5) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

(6) $-1$ (7) 1. (8) $\frac{1}{2}$. (9) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$

## प्रश्नावली 12

(1) $7x^6$, $5\,ax^4$, $80\,x^7$, (2) $\dfrac{-1}{3}x^{-4/3}$, $\frac{1}{2}x^{-1/2}$, $-x^{-2}$, $\dfrac{3}{5}\,.\,x^{-2/5}$

(3) $2x+a$, $3x^2+6\,bx+3c$ (4) $1-x^{-2}$, $2\,x-2\,x^{-3}$

(5) $ae^{ax}$, $5\,e^{5x}$, $-7\,e^{-7x}$, $-\frac{3}{4}\,e^{-3/4x}$

(6) $a^x\,.\,\log_e a$ , $8\,a^{8x}\log_e a$ , $a\,b^{(ax+b)}\ \log_e a$

(7) $\dfrac{1}{x}\log_a e$ , $\sec x . \tan x$ , $-\operatorname{cosec}^2 x$ , $-\operatorname{cosec} x . \cot x$

(8) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $\dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{-1}{1+x^2}$

(9) $-\sin 2x$ , $2\,x\sin 2\,x^2$ , $3\,x^2\sin 2\,x^3$

(10) $2\,x+1$ , $x^2+4\,x+5$

(11) $\dfrac{4\,x}{(x^2+5)^2}$ , $\dfrac{a-1}{(x+a)^2}$

(12) $na\ (ax + b)^{n-1}$, $-x\ (a^2 - x^2)^{-1/2}$, $[\ a^2x\ (\ a^2x^2 + b^2\ )^{-\frac{1}{2}}\ ]$.

(13) $\tan x$, $\sec x . \operatorname{cosec} x$, $\dfrac{\sin (2 \log x)}{x}$

(14) $2 x \sin x + x^2 \cos x$, $a \tan x + ax \sec^2 x$

(15) $\dfrac{1}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}$, $\dfrac{-\sin (\log x)}{x}$

## प्रश्नावली 14

(1) $25\ x^8$. (2) 1. (3) $a^{\sin^{-1}x} \log_e a$. (4) $e^{\sqrt{t}}$

(5) $\dfrac{x \sin x . \cos x}{\log x}$. (6) $\dfrac{1}{2} \dfrac{\log_a e}{x^2}$. (7) $\dfrac{1}{2}$

## प्रश्नावली 15

(1) $10\ b\ (bx + c)^9$. (2) $\dfrac{-1}{2} (a^2x^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}( 2ax+b )$

(3) $\dfrac{x^2 + 2x - 2}{(1 + x)^2}$, (4) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2} . (1 + x)}$

(5) $\dfrac{(a^2 - x^2)^{3/2} + x^2\ (a^2 - x^2)^{-1/2}}{a^2 - x^2)^3}$

(6) $\dfrac{\frac{1}{2} - x^{-\frac{1}{2}}\ (ax^3 + bx^2 + c) + x^{\frac{1}{2}}\ (3ax^2 + 2bx)}{x}$

(7) $\dfrac{\sqrt{1+x^2} \left( 2x\ ex^2 \tan^{-1}x + \dfrac{ex^2}{1 + x^2} \right) - ex^2 \tan^{-1} x .\ x(1+x^2)^{-1/2}}{(\ 1 + x^2\ )}$

(8) $\dfrac{1}{(1 + x^2) \tan^{-1}x}$

(9) $\dfrac{-x\ (b + x)^{1/2}\ (a^2 - x^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\ (b + x)^{-1/2}}{(\ b + x\ )}$

(10) $-\sin x\ (1+\tan x) - \sec x$. (11) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x}{2\ (\ 1 + x^2\ )}$

(12) $\dfrac{e^{\sqrt{x + 2}}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{e^{\sqrt{x + 2}}}{2\sqrt{x + 2}}$

(13) $\frac{\sin(e^x)}{x} + \log x . \cos(e^x). e^x,$

(14) $6x^2 \tan^{-1}x + \frac{2x^3}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}$

(15) $\frac{1}{(\sqrt{1+x}-1)\sqrt{1+x}}$

(16) $\frac{\frac{1}{2x\sqrt{1+\log x}} - \cos x}{\sqrt{1+\log x} - \sin x}$

(17) $\frac{2}{x \log x^2}$

(18) $2\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$

(19) (i) $10^{\log \sin x} . \log_e a . \cot x$ (ii) $7^{x^2+2x} . \log_e a . (2x+2)$

(20) $\frac{\log \cot x}{e^x + e^{-x}} \frac{\tan^{-1}(e^x)}{\sin x \cos x}$

(21) $\frac{-1}{1+x^2}$

(22) $\frac{a \sin\left(a \sin^{-1}\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{x^2-1}}$

(23) $\frac{-\sqrt{b^2-a^2}}{(a \cos x + b)}$

(24) (i) $\frac{-abm}{(1+b^2x^2)[1+m^2 \tan^{-1}(bx)]^2}$

(ii) $\frac{b\left[\frac{x}{(a^2+x^2)} + \frac{1}{a} \tan^{-1}\frac{x}{a}\right]}{1 + \frac{x^2}{a^2}\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)^2}$

(25) $ae^{ax} . \cos(b \tan^{-1}x) - be^{ax} \frac{\sin(b \tan^{-1}x)}{1+x^2}$

(26) $a e^{ax} \sin bx + b e^{ax} \cos bx$

(27) $3\cot^2(e^{3x}.x^x).\operatorname{cosec}^2(e^{3x}.x^x)[3e^{3x}. x^x + e^{3x} . x^x \log_e(xe)]$

(28) $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{(1+x^2)\left(1+e^{2\tan^{-1}x}\right)}$

(29) $(\tan x)^{bgx}\left[\frac{\log \tan x}{x} + \frac{\log x}{\sin x . \cos x}\right] + (\cot x)^{\sin x}$

$[-\sec x + \cos x . \log \cos x]$

(30) $x^x \log_e(xe) + \dfrac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} \log_e (^e/_x)$

(31) $(1+x)^x\left[\text{Log}\,(1+x) + \dfrac{x}{1 \div x}\right] + x^{1+\frac{1}{x}}\left[\dfrac{x+1}{x^2} - \dfrac{\log x}{x^2}\right]$

(32) $[\log x . \log \log x + \log \log x + 1]$

(33) $[\cot x + 2 \cot 2x + 3 \cot 3x + 4 \cot 4x]$
$\sin x . \sin 2x . \sin 3x . \sin 4x.$

(34) $[\cot x + 2\cot 2x - 3\cot 3x]\ \dfrac{\sin x . \sin 2x}{\text{Sin } 3x}$

(35) $x^{\log(x)^{\log \log x}}\ \dfrac{\log ((\log x)^2 e) . (\log x)^{\log \log x}}{x}$

(36) $\dfrac{ny - mx}{nx - my}$

(40) $\frac{1}{2}$.

## प्रश्नावली 16

(3) $196\pi$ घन इंच

(4) $^3/_2$ मी०/घंटा

(5) 54 घन से०/सेकिन्ड

(6) $\dfrac{bc}{a-b}$ मी०/मिनट

(7) $36\pi$

(8) $2\frac{2}{3}$ फी०/से०

(11) 150 मी०/घंटे

## प्रश्नावली 17

(1) $3x - 8y + 25 = 0$ , $8x + 3y = 55$

(2) $2y = x + 4$

(3) $x + 4y = 16$

(4) (i) $x x_1 + y_1 = a^2$ (ii) $\dfrac{y}{y_1} + \dfrac{x}{x_1} = 2$

(iii) $\dfrac{yy_1^{m-1}}{b^m} + \dfrac{x x_1^{m-1}}{a^m} = 1$: (iv) $y - y_1 = a\cot x.(x - x_1)$

(v) $y - y_1 = a\, e^{x_1}(x - x_1)$; (vi) $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$

(vi) $2y_1[(x_1^2 + y_1^2) + a^2 y_1]\, y + [2x_1(x_1^2 + y_1^2) - a^2 x_1]\, x = a^2(x_1^2 - y_1^2)$

(5) (i) $(0 \pm 1)$, $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{4}\right)$, (ii) (o, o), (—a, 0)

(iii) $\left(-\frac{2a}{3}, \quad 4^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{a}{3}\right)$, (iv) $\left(-5, -\frac{5}{c}\right)$

(6) (15, —25)

(7) वक्र के वे सभी बिन्दु जिनके लिए $x = (2n + 1)\pi$. जबकि $m = 0$ या कोई पूर्णांक हो।

(8) $(-1, -\frac{1}{8})$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{24}\right)$

(9) (5, 6) . (10) $\frac{x}{a}\operatorname{Sin} t + \frac{y}{b}\cos t = 1$

(11) $y = (x - at)\tan\frac{t}{2}$ . (13) 0.

(16) $45^0$ (17) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

## प्रश्नावली 18

(1) (i) $2ay + xy_1 = x_1 y + 2ay_1$

(ii) $\frac{x y_1^{m-1}}{b^m} - \frac{y x_1^{m-1}}{a^m} = \frac{x_1 y_1^{m-1}}{b^m} - \frac{y_1 x_1^{m-1}}{a^m}$

(iii) $x \operatorname{Sin} x_1 + ay \cos x_1 = x_1 \operatorname{Sin} x_1 + ay_1 \cos x_1$

(iv) $a^2(x - x_1)y_1 = x_1 b^2(y - y_1)$

(2) $x + y = 2a$ (3) $4x + y = 8$, $9x - y = 27$

(4) (a, 0) (0, a) (5) $x = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

## प्रश्नावली 19

(1) (i) $30240 \times 2^5 (2x+3)^5$ (ii) $a^5 e^{ax}$

(iii) $\sin\left(2x + \frac{15}{2}\pi\right)$ (iv) $3^5 \underline{|3} (3x+7)^{-5}$

(3) $\frac{1}{2}\left[4^n \cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-10^n \cos\left(10x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

(4) $(34)^{\frac{n}{2}} e^{3x} \cos\left[5x+n \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)\right]$

(5) (i) $\frac{1}{2}a^n e^{ax}+(a^2+4b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \cos\left(2bx+n \tan^{-1}\frac{2b}{a}\right)$

(ii) $\frac{1}{2^{n+1}} \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{2^{n+2}} \sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$

(iii) $\frac{1}{2}\, 5^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(2n+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}(17)^{\frac{n}{2}} e^x$

$\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$

(iv) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(x+a)^{\frac{1}{2}-n}$

## प्रश्नावली 20

(1) $\frac{1}{5}x^5,\ \frac{1}{501}x^{501},\ x,\ k,\ \frac{5}{7}x^7$

(2) $\frac{-x^{-2}}{2},\ \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}},\ \frac{x^{-109}}{-109},\ -\frac{3}{2}x^{-4}$

(3) $-\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}},\ 4x^{\frac{1}{4}},\ \frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}},\ -2x^{-\frac{1}{2}}$

(4) $\frac{a\,x^5}{5}+\frac{b\,x^4}{4}+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{2}x^2+c.\,x$

(5) $\frac{2}{5}\sqrt{a}\,x^{\frac{5}{2}}-\frac{b}{4}x^4$. (6) $x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\ldots\ldots$

(7) $\frac{a\,x^2}{2}+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{4}x^4$. (8) $x+\frac{x^2}{2a}$

(9) (i) $2a^3x^{\frac{1}{2}}+2a^2x^{\frac{3}{2}}+\frac{6}{5}\,a\,x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$

(ii) $4 \log x - 3x^{-1} - x^{-2}$. (iii) $\frac{10^x}{\log_e 10} + 3e^x + 3x^2$

(10) (i) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-\frac{1}{2}}$ (ii) $49 \log x + 7x^2 + \frac{x^4}{4}$

(11) $\sec x + 5 \cot x$ (12) $-\operatorname{cosec} x - \cot x - x$

(13) $\frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{a^x}{\log_e a}$ (14) $\frac{10^x}{\log_e 10} + 3e^x - \frac{3}{2} x^{-4}$

(15) $2 \sec x - \frac{1}{2}\operatorname{cosec} x$.

(16) (i) $\frac{\sin x + x}{2}$ (ii) $-\operatorname{cosec} x - \cos x$

(iii) $\sin x + \cos x$ (iv) $4 \tan x + 5 \sec x$

(v) $-3 \cot x - 4 \operatorname{cosec} x$.

## प्रश्नावली 21

(1) $-\cos(\log x)$ (2) $\cos e^x$ (3) $\frac{\sec^{m+1} x}{n+1}$

(4) $\frac{(\sin^{-1}x)^2}{2}$ (5) $\frac{(\log x)^{n+1}}{n+1}$ (6) $\frac{-(\cos x)^{m+1}}{m+1}$

(7) $e^{\tan^{-1}x}$ (8) $\frac{a^{\log x}}{\log_e a}$ (9) $\frac{1}{3} \sec^3 x$

(10) $-\cos(\sec x)$

## प्रश्नावली 22

(1) $\frac{-(3-2x)^6}{12}$, $\frac{1}{9}(3x+a)^{\frac{3}{2}}$, $\frac{2}{63}(7x+6)^{\frac{9}{2}}$ $\frac{3}{2}\frac{\sqrt{a}}{c}(cx+d)^{\frac{3}{2}}$

(2) $(2x-3)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{-(ax+b)^{-2}}{2a}$, $\frac{-(3x+5)^{-5}}{15}$

(3) $\frac{-\cos ax}{a}$, $\frac{\sin nx}{n}$, $\frac{-2}{k} \cdot \cos \frac{k}{2} x$

(4) $\frac{\cot(2-3x)}{3}$, $\frac{\tan(5x-6)}{5}$, $\frac{\sec ax}{a}$

(5) $\frac{10^{5x}}{5 \log_e 10}$, $\frac{a^{9x}}{9 \log_e a}$, $\frac{e^{ax}}{a}$, $\frac{e^{ax+b}}{a}$

(6) $\frac{\log (a x+b^2)}{a}$, $\frac{\log (a^2x-b^2)}{a^2}$, $\frac{1}{2} \log (2x-6)$

(7) $\frac{1}{3} e^{3x} - \cos (2x+5) + \frac{3}{a} \tan (x a+b)$

(8) $\frac{\log x}{5} + \frac{\sec (a x+5)}{a} - \frac{\cot b x}{b}$

(9) (i) $x-\sqrt{3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$ (ii) $1 9 x-2 \log (9-x)$

(iii) $(b-a^2) x-(a+x)^{-1}$, x

(10) $\frac{1}{2} \tan x$. (11) $2 \tan \frac{x}{2}$, (12) $\frac{\sin 2x}{2}$

(13) $x + \frac{\sin 2x}{2}$, (14) $\frac{-\cot (ax/2}{a}$

## प्रश्नावली 23

(1) (i) $\log (1+x^3)$, (ii) $\log (a x^2+b x+c)$

(2) (i) $\frac{-1}{5} (5x^3+1)^{-1}$, (ii) $\log (x^4+x^2+x k+d)$

(3) (i) $\frac{\sin^3 x}{3}$ (ii) $\frac{-\cos x^2}{2}$ (iii) $\frac{(a x+b)^3}{3a}$

(4) $\frac{-(a + b \cos x)^3}{3 b}$ (5) $\frac{(1+x^6)^{\frac{3}{2}}}{9}$

(6) $\log \tan x$ (7) (i) $\frac{2}{3} \log \tan \frac{3x}{2}$

(ii) $\log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tan^{-1} x}{2}\right)$

(8) $\log \tan \left(\frac{\operatorname{cosec} x}{2}\right)$ (9) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1}{2}\left( x+ \frac{\pi}{2}\right)$

(10) $\log \log \sin x$ (11) $\log (\sin(\log x))$

(12) $\tan^{-1} (\sin x)$ (13) $\frac{\log (1+\cos^3 x)}{3}$

(14) $\log(1+\tan x)$ (15) $\frac{-(\sec x+\tan x)^{-9}}{9}$

(16) $\log(e^{x}-e^{-x})$ (17) $\frac{1}{e}\log(1+c\,e^{x}$

(18) $\frac{1}{a}\log(e^{x}-e^{-x})$ (19) $\log(b\,x+c\,e^{x})$

(21) $x\cos a+\sin a\log\sin(x-a)$

(22) $\frac{-[\tan(\cos^{-1}x]^2}{2}$ (23) $\frac{(\tan^{-1}x^4)^2}{8}$

(24) $\frac{(\cos x^2)^4}{4}$ (25) $\frac{\log\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}$

(26) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\tan\frac{1}{2}\left(x-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

(27) $\log\tan\frac{x}{2}$, $\log\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

(28) x.

## प्रश्नावली 24

(1) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$ ; $\frac{4}{3}\sin\theta-\frac{1}{9}\sin 3\theta$,

$\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x$, $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$

(2) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 12x}{12}-\frac{\sin 2x}{2}\right]$, $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 10x}{10}+\frac{\sin 6x}{6}\right]$

$\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\cos 8x}{8}\right]$

(3) (i) $\frac{4}{3}\left(\frac{-\cos 4x}{4}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 6x}{36}\right)$

(ii) $\frac{-1}{2n}\cos nx+\frac{1}{2(n+2)}\cos(n+2)x$

$+\frac{1}{2(n-2)}\cos(n-2)x$

(iii) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$

(4) $\log(x^3+\sqrt{x^6+9})$ (5) $\log(1+x+\sqrt{1-2x-x^2})$

(6) $\tan^{-1}(x-2)$ (7) $\log(x^2-2)$

(8) $\frac{1}{2}\log(x^2+9)+\frac{\tan^{-1} x/_3}{3}$

(9) $\log(x^3+\sqrt{x^6-9})$

(10) $\log(3+\tan x)$. (11) $2\sin^{-1}(\sqrt{x})$

(12) $\frac{1}{2}[\sqrt{(4-\sin^2 x)}+4\sin^{-1}(\sin x)]$

(13) $x+2\log(x+4)$ (14) $\frac{1}{2}\tan x$

## प्रश्नावली 25

(1) (i) $\sin x - x\cos x$ (ii) $x\tan x + \log\cos x$

(iii) $(x^2-2x+2)e^x$

(2) (i) $-(x^2+2x+2)e^{-x}$ (ii) $a^{-3}e^{ax}(a^2x^2-2ax+2)$

(iii) $\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3$

(3) $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$ (4) $-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)$

(5) $x^2\sin x-2x\cos x-2\sin x$

(6) $(6x-x^3)\cos x+(3x^2-6)\sin x$

(7) $\frac{1}{36}[3x(\sin 3x+9\sin x)+\cos 3x+27\cos x]$

(8) $(x^3-6x)\sin x+(3x^2-6)\cos x)$

(9) $2[\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}]$

(10) $2[-x\cos\sqrt{x}+2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})]$

(11) $x\tan x-\log\sec x-\frac{x^2}{2}$

(12) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{36}\sin 6x-\frac{x\cos 6x}{6}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 6x}{4}-x\frac{\cos 2x}{2}\right]$

(13) $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

(14) $x \operatorname{cosec}^{-1}x + \log \sqrt{x^2 + x - 1}$

(15) $\frac{1}{2}[x^2 \sec^{-1}x - \sqrt{x^2 - 1}\,]$ (16) $\frac{x^2}{4} \log_e (x^2/e)$

(17) $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \log_e \left(\frac{x^{n+1}}{e}\right)$

(18) $\frac{x^{n+1}}{x+1} (\log x)^2 - \frac{2x^{n+1}}{(n+1)^2} \log x + \frac{2x^{n+1}}{(n+1)^3}$

(19) $-x \cot x + 2 \log \sin \frac{1}{2} x$

(20) $x \tan x - 2 \log \sec \frac{x}{2}$

(21) $x \log (x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{a^2 + x^2}$

(22) $\log (\log \log x - 1)$

(23) $\frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \log (\sec x + \tan x)$

(24) $x - (\sin^{-1} x) \sqrt{1 - x^2}$ (25) $\frac{x - \tan^{-1}x}{\sqrt{1 + x^2}}$

(26) $\frac{e^x}{1 + x}$

## प्रश्नावली 26

(1) $\sqrt{29}\; e^{-2x} \sin (5x + \tan^{-1} \frac{5}{2})$

(2) $\sqrt{5}\, e^x \sin (2x - \tan^{-1} 2)$

(3) $-\cos (\log x)$ (4) $\frac{1}{2} x - \frac{\sin 2x}{4}$

(5) $5e^{3x} \cos (4x + \tan^{-1} 4/3)$

(6) $\frac{e^{2x} \sec 2x}{2}$ (7) $e^x \tan \frac{x}{2}$ (8) $-x \cot \frac{x}{2}$

(9) $\frac{1}{5}$ (10) 2 (11) $\frac{3\pi}{2}$ (12) $\frac{1}{2} \log 7$

(13) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$ (14) $\frac{1}{3} (1 - \cos a^3)$

(15) $\frac{1}{5} (\log 2e)^5 - \frac{1}{5}$ (16) $\frac{1}{4} \log \frac{7}{4}$

(17) $\frac{1}{2}[x^3\sqrt{x^6-1} - \log(x^3+\sqrt{x^6+1})]$

(18) $e^x \sin x$ (19) $-\frac{1}{3}(\cos^2-1)^{\frac{3}{2}}$

(20) $e^x + \sqrt{2}\, e^x \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

(21) $\frac{e^x}{1+x}$ (22) $\frac{1}{3}(\sec^2 x + 1)^{\frac{3}{2}}$

(23) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2})$

(24) $\frac{1}{2}\cos x\sqrt{\cos^2 x-4} - 2\log(\cos x \pm \sqrt{\cos^2-4})$

(25) $\frac{1}{2}\tan x\sqrt{\tan^2 x-4} - 2\log(\tan x+\sqrt{\tan^2 x-4})$

(26) $\frac{e^{x\sqrt{3}}}{2}\cos\left(x+\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$

## प्रश्नावली 27

(1) $\frac{8}{5}\log(x-8)+\frac{5}{3}\log(x-5)$. (2) $\log\frac{x-2}{x-1}$

(3) $\frac{1}{8}\log\frac{4-x}{4+x}$ (4) $x+\log\frac{(x+1)}{(x+2)^5}$

(5) $\frac{5}{36}\log\frac{x-1}{x+5}-\frac{1}{6}(x-1)^{-1}$

(6) $\frac{1}{4}\log\frac{x-2}{x+2}$ (7) $\log\frac{x-7}{x-6}$

(8) $\Sigma\frac{a\log(x-a)}{(a-b)(a-c)}$ (9) $(x-1)^{-1}+2\log\frac{x-2}{x-1}$

# हिन्दी से अंग्रेजी शब्दावली

| | |
|---|---|
| 1. अतिपरवलय | Hyperbola |
| 2. अवकलज | Derivative |
| 3. अदित: अवकलन | Differentiation, ab-initio |
| 4. अनन्त श्रेणी | Infinite series |
| 5. अचर | Constant |
| 6. अपुनरावर्ती | Non Repeated |
| 7. अपुनरावर्ती एकघाती खंड | Non-Repeated Linear factor |
| 8. अपुनरावर्ती द्विघाती खंड | Non-Repeated Quadric factor |
| 9. अवकल | Differential |
| 10. अवकल गणित | Differential Calculus |
| 11. अवकल गुणांक | Differential Coefficient |
| 12. अवकल करना | Differentiate |
| 13. अवकलित | Differentiated |
| 14. अवकलन | Differentiation |
| 15. असमिका | Inequality |
| 16. अस्पष्ट फलन | Implicite function |
| 17. आंशिक भिन्न द्वारा समाकलन | Integration by partial fraction |
| 18. उत्तरोत्तर अवकलन | Successive Differentiation |
| 19. एकघाती खंड | Linear factor |
| 20. कलन | Calculus |
| 21. खंड | Factor |
| 22. खंडश: समाकलन | Integration by parts |
| 23. खुला क्षेत्र | Open domain |
| 24. गणितीय संक्रिया | Mathematical Operation |
| 25. गुणन फल | Product |
| 26. त्वरण | Acceleration |
| 27. द्विपद प्रमेय | Binomial Theorem |
| 28. द्विघाती | Quadric |
| 29. निरपेक्षचर | Absolute Constant |
| 30. परतंत्र चर | Dependent Variable |
| 31. परवलय | Parabola |

| | |
|---|---|
| 32. पुनरावर्ती | Repeated |
| 33. पुनरावर्ती द्विघाती खंड | Repeated Quadric factor |
| 34. पुनरावर्ती एक घाती खंड | Repeated Linear factor |
| 35. पूर्णांक | Integer |
| 36. प्रतीक | Symbol |
| 37. प्रतिस्थापन | Substitution |
| 38. प्रवणता | Gradient |
| 39. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन | Integration by Substitution |
| 40. प्रतिलोम फलन | Inverse function |
| 41. प्रचलिक समीकरण | Parametric Equation |
| 42. प्रक्रम | Process |
| 43. परिमेय वीजीय भिन्न | Rational Algebrical fraction |
| 44. फलन | Function |
| 45. फलन की सीमा | Limit of Function |
| 46. वीजीय रीतियाँ | Algebraical Method |
| 47. वन्द क्षेत्र | Closed domain |
| 48. भागफल | Quotient |
| 49. मानक रूप | Standarad forms |
| 50. रेखीय | Linear |
| 51. लघुगणकीय अवकलन | Lagarithmic Differentiation |
| 52. वेग | Velocity |
| 53. वक्र | Curve |
| 54. वास्तविक भिन्न | Proper fraction |
| 55. संवृत्त क्षेत्र | Closed domain |
| 56. वैकल्पिक | Alternative |
| 57. सनिकट हल | Approximate calculation |
| 58. स्वेच्छ अचर | Arbitrary Constant |
| 59. संतत | Continuous |
| 60. संतत वक्र | Continuous curve |
| 61. स्पष्ट फलन | Explicite function |
| 62. स्वतंत्र चर | Independent variable |
| 63. समाकल | Integral |
| 64. समाकलन | Integration |
| 65. सीमा | Limit |
| 66. संक्रिया | Operation |
| 67. त्रिकोणमितीय | Trigonometrical |
| 68. चर का प्रभाव क्षेत्र | Domain of the variable |
| 69. चर राशि | Variable Quantity |

# अंग्रेजी से हिन्दी शब्दावली

| | |
|---|---|
| 1. Absolute Constant | निरपेक्ष अचर |
| 2. Acceleration | त्वरण या वेग वृद्धि |
| 3. Algebraical Method | बीजीय रीतियां |
| 4. Alternative | वैकल्पिक |
| 5. Approximate Calculation | सन्निकट हल |
| 6. Arbitrary Constant | स्वेच्छ अचर |
| 7. Binomial Theorem | द्विपद प्रमेय |
| 8, Calculus | कलन |
| 9. Closed domain | संवृत्त या वंद क्षेत्र |
| 10. Constant | अचर |
| 11. Continuous | संतत |
| 12. Continuous Curve | संतत वक्र |
| 13. Differential | अवकल |
| 14. Differential Calculus | अवकल गणित |
| 15. Differential Coefficient | अवकल गुणांक |
| 16. Differentiate | अवकल करना |
| 17. Differentiated | अवकलित |
| 18. Differentiation | अवकलन |
| 19. Differentiation-ab-initio | आदित: अवकलन |
| 20. Differentiation logarithmic | लघुगणकीय अवकलन |
| 21. Derivative | अवकलज |
| 22. Dependent Variable | परतंत्र चर |
| 23. Domain of the Variable | चर का प्रभाव क्षेत्र |
| 24. Explicite function | स्पष्ट फलन |
| 25. Function | फलन |
| 26. Factors | खंड |
| 27. Gradient | प्रवणता |
| 28. Hyperbola | अतिपरवलय |
| 29. Inequality | असमिका |
| 30. Infinite Series | अनन्त श्रेणी |
| 31. Implicite function | अस्पष्ट फलन |
| 32. Independent Variable | स्वतंत्र चर |
| 33. Integer | पूर्णांक |

| | | |
|---|---|---|
| 34. | Integral Calculus | समाकल गणित |
| 35. | Integration by parts | खंडशः समाकलन |
| 36. | Integration by Substitution | प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन |
| 37. | Inverse function | प्रतिलोम फलन |
| 38. | Integral | समाकल |
| 39. | Integration | समाकलन |
| 40. | Integration by partial fraction | आंशिक भिन्न द्वारा समाकलन |
| 41. | Limit | सीमा |
| 42. | Limit of Function | फलन की सीमा |
| 43. | Linear | रेखीय |
| 44. | Linear factors | एक घाती खंड |
| 45. | Logarithmic Differentiation | लघुगणकीय अवकलन |
| 46. | Mathematical Operation | गणितीय संक्रिया |
| 47. | Non-Repeated | अपुनरावर्ती |
| 48. | Non-Repeated Linear factors | अपुनरावर्ती एक घाती खंड |
| 49. | Non-Repeated Quadric factors | अपुनरावर्ती द्विघाती खंड |
| 50. | Open domain | विवृत या खुला क्षेत्र |
| 51. | Operation | संक्रिया |
| 52. | Parametric Equation | प्रचलिक समीकरण |
| 53. | Parabola | परवलय |
| 54. | Product | गुणनफल |
| 55. | Proper fraction | वास्तविक भिन्न |
| 56. | Process | प्रक्रम |
| 57. | Quotient | भागफल |
| 58. | Quadric | द्विघाती |
| 59. | Rational Algebrical fraction | परिमेय बीजीय भिन्न |
| 60. | Relative term | आपेक्षिक पद |
| 61. | Repeated | पुनरावर्ती |
| 62. | Repeated Quadric factors | पुनरावर्ती द्विघाती खंड |
| 63. | Repeated Linear factors | पुनरावर्ती एक घाती खंड |
| 64. | Standared forms | मानक रूप |
| 65. | Substitution | प्रतिस्थापन |
| 66. | Successive Differentiation | उत्तरोत्तर अवकलन |
| 67. | Symbol | प्रतीक |
| 68. | Trigonometrical | त्रिकोणमितीय |
| 69. | Variable Quantity | चर राशि |
| 70. | Velocity | वेग |

# मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी

## विश्वविद्यालय स्तरीय

### विज्ञान—विषयक प्रकाशन

**भौतिकी**

इलेक्ट्रोन वाल्व प्रवर्धक
सैद्धांतिक यांत्रिकी
उच्च प्रायोगिक भौतिकी
विद्युत एवं चुम्बकत्व
उष्मा गतिकी
भूतद्रव्य के सामान्य गुण धर्म

**रसायन**

गैस क्रोमेटोग्राफी
अकार्बनिक रसायन २ भाग
रासायनिक गणनाएँ
प्रारम्भिक कार्बनिक रसायन
पृष्ठ रसायन
रासायनिक विश्लेषण
कार्बोहाइड्रेट्स

**प्राणि विज्ञान**

सामान्य जीव विज्ञान

**वनस्पति**

प्रायोगिक वनस्पति विज्ञान
वाइरस
कवक
ब्रायोफाइटा
क्रिप्टोगैमीय वनस्पति विज्ञान २ भाग

**भू-भौतिकी**

खनिज एवं स्फाट विज्ञान

**भू-विज्ञान**

आर्थिक भू-विज्ञान